



TEORI BILANGAN

DEDI NURJAMIL
ANGGA NUROHMAN
SANDY IHSAN AMARULLOH



Teori Bilangan

«“Mathematics is the queen of the sciences and number theory is the queen of mathematics”»

Carl Friedrich Gauss



Dedi Nurjamil
Sandy Ihsan Amarulloh
Angga Nurohman



Teori Bilangan

Dedi Nurjamil
Sandy Ihsan Amarulloh
Angga Nurohman



Teori Bilangan

Copyright © 2024 oleh

Dedi Nurjamil, M. Pd.

Sandy Ihsan Amarulloh, S. Pd.

Angga Nurohman

Editor, Desain Cover, dan Tata Letak oleh: Angga Nurohman

Diterbitkan Oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024

; 18x 25 cm

ISBN: 978-623-448-912-5

Semua hak dilindungi undang-undang. Tidak ada bagian dari publikasi ini yang boleh direproduksi, disimpan dalam sistem pencarian, atau ditransmisikan dalam bentuk apa pun atau dengan cara apa pun, baik elektronik, mekanis, fotokopi, rekaman, atau lainnya, tanpa izin tertulis dari pemilik hak cipta.

Cetakan Pertama, Juni 2024

Prakata

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT. Sawalat serta salam semoga terlimpah curah kepada nabi besar Muhammad SAW. Atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul “Teori Bilangan” ini.

Buku ini dilengkapi dengan soal-soal latihan pada setiap akhir bab dan terdapat satu bab berisi kumpulan soal dari berbagai sumber yang dicantumkan yang bertujuan untuk menguji pemahaman dan mengasah kemampuan pembaca akan setiap materi yang telah disajikan. Selain itu, penulisan buku ini bertujuan untuk menghasilkan bahan ajar teori bilangan yang sesuai dengan karakteristik mahasiswa serta sesuai dengan karakteristik materi teori bilangan yang banyak memuat definisi, konsep, dan teorema. Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu, sehingga buku ini dapat terselesaikan tepat waktu dan dapat digunakan sebagaimana mestinya. Penulis berharap buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa program studi Pendidikan Matematika dan bagi pecinta ilmu pengetahuan pada umumnya.

Sebagai penutup, pepatah bijak mengatakan tak ada gading yang tak retak. Oleh karena itu, penulis menerima saran dan kritik dari pembaca yang bersifat membangun akan kami terima guna pengembangan buku ini secara berkelanjutan.

Tasikmalaya, 2024

Penulis

Daftar Isi

1 | Bilangan

1.1	Bilangan Istimewa	1
1.2	Well Ordering Principle	2
1.3	Sifat Archimedes	3
1.4	Pembuktian Sifat Archimedes	4
1.5	Barisan Istimewa	5

8 | Induksi Matematika dan Teorema Binomial

2.1	Induksi Matematika	8
2.2	Teorema Binomial	10

13 | Basis Bilangan

3.1	Bilangan Basis Sepuluh (Desimal)	13
3.2	Bilangan Basis Dua (Biner)	13
3.3	Bilangan Basis Delapan (Oktal)	14
3.4	Bilangan Basis Enam Belas (Heksadesimal)	14
3.5	Bilangan Basis untuk Pecahan	14

18 | Keterbagian

4.1	Pendahuluan	18
4.2	Bilangan Habis Dibagi	19
4.2.1	Bilangan Habis Dibagi Dua	19
4.2.2	Bilangan Habis Dibagi Tiga	19
4.2.3	Bilangan Habis Dibagi Lima	20
4.2.4	Bilangan Habis Dibagi Enam	20
4.2.5	Bilangan Habis dibagi Sebelas	21

23 | FPB dan KPK

5.1	Faktor Persekutuan Terbesar	23
5.2	Kelipatan Persekutuan Terkecil	25

27 | Algoritma Euclid

6.1	Pendahuluan	27
6.2	Penggunaan	27
6.3	Lainnya	29

32 | Persamaan Diopanthine

7.1	Definisi	32
7.2	Penggunaan	32

35 | Bilangan Prima

8.1	Pendahuluan	35
8.2	Definisi	36
8.3	Contoh Masalah	37

41 | Kongruensi

9.1	Modulo	41
9.2	Relasi Ekuivalensi	42
9.3	Kongruensi Linear	44
9.4	Kongruensi Tingkat Tinggi	46
9.4.1	Kongruensi Kuadrat	46
9.4.2	Kongruensi Polinom Bilangan Bulat	47

49 | Teorema Sisa Cina

10.1	Sejarah	49
10.2	Pembuktian	49
10.3	Langkah Penyelesaian	51

54 | Teorema Fermat dan Teorema Wilson

11.1	Teorema Fermat	54
11.2	Teorema Wilson	57

60 | **Fungsi Bilangan Teoritik**

12.1	Definisi	60
12.2	Sifat	61

64 | **Kumpulan Soal Latihan**

This page is intentionally left blank.

Bilangan

1.1 Bilangan Istimewa

Bilangan istimewa adalah kumpulan bilangan khusus yang memiliki sifat-sifat unik atau menarik dalam matematika. Beberapa bilangan istimewa yang umum ditemui antara lain:

1. Bilangan Genap

Bilangan genap adalah bilangan bulat positif yang dapat dibagi habis oleh 2. Contoh bilangan genap adalah 2, 4, 6, 8, dan seterusnya.

2. Bilangan Ganjil

Bilangan ganjil adalah bilangan bulat positif yang tidak dapat dibagi habis oleh 2. Contoh bilangan ganjil adalah 1, 3, 5, 7, dan seterusnya.

3. Bilangan Prima

Bilangan prima adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan hanya memiliki dua pembagi positif, yaitu 1 dan dirinya sendiri. Contoh bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7, 11, dan seterusnya. Bilangan prima memiliki peran penting dalam teori bilangan dan kriptografi.

4. Bilangan Komposit

Bilangan komposit adalah bilangan bulat positif yang memiliki lebih dari dua pembagi positif. Dengan kata lain, bilangan komposit adalah bilangan bulat positif yang bukan bilangan prima. Contoh bilangan komposit adalah 4, 6, 8, 9, 10, dan seterusnya.

5. Bilangan Prima Mersenne

Bilangan prima Mersenne adalah bilangan prima yang memiliki bentuk $2^p - 1$, di mana p adalah bilangan prima. Beberapa contoh bilangan prima Mersenne adalah

6. Bilangan Prima Twin

Bilangan prima twin adalah sepasang bilangan prima yang selisihnya adalah 2. Contoh bilangan prima twin adalah (3, 5), (11, 13), dan (17, 19).

7. Bilangan Kuadrat Sempurna

Bilangan kuadrat sempurna adalah bilangan bulat positif yang merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat. Misalnya, 1, 4, 9, 16, dan 25 adalah bilangan kuadrat sempurna.

8. Bilangan Fibonacci

Deret Fibonacci adalah deret bilangan yang setiap angka selanjutnya merupakan jumlah dari dua angka sebelumnya dalam deret tersebut. Deret Fibonacci dimulai dengan 0 dan 1, sehingga deretnya adalah 0,1,1,2,3,5,8,13, dan seterusnya.

9. Bilangan Perfect Number

Bilangan perfect number adalah bilangan bulat positif yang merupakan jumlah dari semua pembagi positifnya, kecuali bilangan itu sendiri. Contoh bilangan perfect number adalah 6; ($1 + 2 + 3 = 6$) dan 28; ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$).

10. Bilangan Abundant Number

Bilangan abundant number adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari jumlah dari semua pembagi positifnya, kecuali bilangan itu sendiri. Contoh bilangan abundant number adalah 12; ($1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$) dan 20; ($1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 > 20$)

Bilangan istimewa ini memiliki sifat-sifat khusus yang menarik dan sering kali menjadi fokus dalam penelitian matematika dan ilmu pengetahuan lainnya. Beberapa dari sifat-sifat ini masih menjadi subjek penelitian dan masalah terbuka dalam matematika modern.

1.2 Well Ordering Principle

Well-Ordering Principle (WOP) atau Prinsip Terurut Sempurna merupakan salah satu dari enam aksioma dasar dalam teori himpunan **Zermelo-Fraenkel (ZF)**, yang menyusun dasar matematika modern berdasarkan himpunan. **Prinsip Terurut Sempurna** menyatakan bahwa setiap himpunan non-kosong dari bilangan asli memiliki elemen terkecilnya. Dengan kata lain, setiap himpunan bilangan asli selalu memiliki elemen terkecilnya yang berada pada posisi paling awal. Secara formal, Prinsip Pengeurutan Baik dinyatakan sebagai berikut:

Setiap himpunan non-kosong A dari bilangan asli pasti memiliki elemen terkecil.

Beberapa hal penting yang perlu dicatat tentang WOP adalah:

1. Prinsip Pengeurutan Baik (WOP) sering digunakan dalam pembuktian matematika, khususnya yang melibatkan bilangan asli dan induksi matematika.

2. WOP adalah aksioma dalam teori himpunan dan dianggap sebagai bagian penting dari fondasi matematika modern.
3. Prinsip Terurut Baik dan Prinsip Induksi Matematika (PIM) secara bersama-sama membentuk metode induksi matematika yang kuat untuk membuktikan pernyataan yang berlaku untuk himpunan bilangan asli.
4. Meskipun WOP berlaku untuk himpunan bilangan asli, gagasan serupa juga dapat diterapkan pada beberapa struktur terurut lainnya.

Contoh penerapan WOP adalah dalam pembuktian "Prinsip Dasar Aritmatika," di mana WOP digunakan untuk menunjukkan bahwa setiap bilangan asli memiliki faktorisasi prima yang unik.

Prinsip Terurut Sempurna (Well-Ordering Principle) berlaku pada berbagai himpunan dan struktur terurut. Di bawah ini, contoh dua himpunan di mana WOP berlaku:

1. Himpunan Bilangan Asli ($\mathbb{N}$)

Prinsip Terurut Sempurna diterapkan secara umum pada himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ untuk menyatakan bahwa setiap himpunan non-kosong dari bilangan asli memiliki elemen terkecil. Artinya, setiap himpunan yang tidak kosong dari bilangan asli pasti memiliki elemen terkecilnya sendiri. Misalnya, himpunan $\{3, 5, 1, 9, 2\}$ memiliki elemen terkecil yaitu 1.

Contoh: Perhatikan himpunan bilangan asli $\mathcal{A} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$. Himpunan ini adalah himpunan bilangan asli yang kelipatan 3. Dalam himpunan ini, elemen terkecil adalah 3. Oleh karena itu, WOP berlaku untuk himpunan $\mathcal{A}$.

2. Himpunan Barisan Terbatas

Prinsip Terurut Sempurna juga berlaku untuk himpunan barisan terbatas. Sebuah barisan terbatas adalah himpunan elemen-elemen yang diurutkan dalam urutan tertentu, dengan jumlah elemen yang terbatas.

Contoh: Perhatikan himpunan $\mathcal{B} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$. Himpunan ini adalah barisan kuadrat dari bilangan bulat positif. Karena $\mathcal{B}$ adalah barisan dengan jumlah elemen yang terbatas, kita dapat mengurutkan elemen-elemennya dari yang terkecil hingga yang terbesar: 1, 4, 9, 16, 25. Dalam kasus ini, elemen terkecil adalah 1, dan WOP berlaku untuk himpunan $\mathcal{B}$.

1.3 Sifat Archimedes

Sifat Archimedes adalah salah satu sifat penting yang berlaku pada bilangan real. Sifat ini diberi nama dari matematikawan kuno terkenal bernama Archimedes dari

Syracuse. **Sifat Archimedes** menyatakan bahwa himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$) bukanlah himpunan terbatas, artinya tidak ada bilangan bulat positif yang begitu besar sehingga dapat melampaui semua elemen dalam himpunan tersebut. Secara formal, sifat ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk setiap bilangan real positif x , ada bilangan bulat positif n sehingga $n > x$.

Contoh penerapan Sifat Archimedes:

1. Misalkan kita ingin menunjukkan bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ memenuhi sifat Archimedes. Ambil bilangan real positif apa pun, misalnya $x = 10$. Berapapun bilangan bulat positif yang kita ambil, kita selalu dapat menemukan bilangan bulat positif yang lebih besar daripada 10, misalnya $n = 11$. Jadi, sifat Archimedes berlaku untuk himpunan bilangan asli.
2. Sebagai contoh lain, kita ingin menunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ juga memenuhi sifat Archimedes. Ambil bilangan real positif apa pun, misalnya $x = 20$. Kita dapat memilih bilangan bulat positif yang lebih besar daripada 20, misalnya $n = 21$. Jadi, sifat Archimedes juga berlaku untuk himpunan bilangan bulat.

Sifat Archimedes memiliki implikasi yang penting dalam analisis matematika dan digunakan dalam banyak pembuktian dan konstruksi matematika. Dengan adanya sifat ini, kita tahu bahwa tidak ada batasan atas pada himpunan bilangan asli dan bilangan bulat, yang memungkinkan kita untuk melakukan banyak operasi matematika dengan lebih mudah dan efisien.

1.4 Pembuktian Sifat Archimedes

Untuk membuktikan Sifat Archimedes menggunakan Prinsip Terurut Sempurna (*Well-Ordering Principle*), kita perlu membuat asumsi sebaliknya, yaitu anggapan bahwa Sifat Archimedes tidak berlaku. Artinya, kita anggap bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ adalah himpunan terbatas. Selanjutnya, dengan mengaplikasikan WOP, kita akan sampai pada kontradiksi yang menunjukkan bahwa anggapan tersebut salah, dan akhirnya membuktikan Sifat Archimedes. Berikut adalah langkah-langkah pembuktian tersebut:

Step 1. Asumsikan bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ adalah himpunan terbatas.

Step 2. Dengan asumsi tersebut, maka ada elemen terbesar dalam himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$) Misalkan elemen terbesar ini adalah m , artinya m adalah bilangan bulat positif terbesar dalam himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$.

- Step 3. Karena m adalah bilangan bulat positif terbesar dalam himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, maka $m - 1$ juga merupakan bilangan bulat positif.
- Step 4. Karena m adalah bilangan bulat positif terbesar, maka $m + 1$ bukanlah bagian dari himpunan bilangan asli.
- Step 5. Dalam hal ini, tidak ada bilangan bulat positif n yang lebih besar dari $(m + 1)$. Padahal, kita telah menemukan bilangan bulat positif (yakni $(m - 1)$) yang lebih besar daripada $(m + 1)$. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $\mathbb{N}$ adalah himpunan terbatas.
- Step 6. Karena telah mencapai kontradiksi, maka kita telah membuktikan **Sifat Archimedes**, yang menyatakan bahwa tidak ada batasan atas pada himpunan bilangan asli.

1.5 Barisan Istimewa

1. Barisan Triangular

Barisan triangular merupakan barisan bilangan yang membentuk pola segitiga. Setiap elemen barisan merupakan jumlah dari bilangan asli berurutan. Berikut adalah beberapa sifat barisan triangular: Elemen ke- n dari barisan triangular adalah hasil penjumlahan dari semua bilangan asli dari 1 hingga n . Misalnya, elemen ke-5 adalah $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Barisan triangular dapat dihitung menggunakan rumus umum:

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Contoh barisan triangular: 1, 3, 6, 10, 15, ...

2. Barisan Oblong

Barisan oblong (atau sering juga disebut barisan rectangular) adalah barisan bilangan yang membentuk persegi panjang. Barisan ini dapat dianggap sebagai barisan dua dimensi yang mewakili jumlah seluruh bilangan asli dari 1 hingga n pada setiap baris atau kolom. Beberapa sifat barisan oblong antara lain: Elemen ke- n dari barisan oblong adalah hasil penjumlahan dari semua bilangan asli dari 1 hingga n , dan dapat dinyatakan sebagai produk n dengan elemen ke- n dari barisan triangular. Misalnya, elemen ke-5 dari barisan oblong adalah $5 \cdot 15 = 75$ (dengan mengambil hasil dari barisan triangular di atas). Rumus umum untuk menghitung elemen ke- n dari barisan oblong adalah

$$O(n) = n \cdot T(n)$$

Contoh barisan oblong: 1, 4, 10, 20, 35, ...

3. Barisan Kuadrat

Barisan kuadrat merupakan barisan bilangan yang membentuk pola kuadratik. Setiap elemen barisan dihasilkan dengan mengalikan bilangan asli berurutan dengan dirinya sendiri. Beberapa sifat barisan kuadrat antara lain: Elemen ke- n dari barisan kuadrat adalah n^2 , di mana n adalah nomor urut elemen tersebut. Misalnya, elemen ke-5 adalah $5^2 = 25$. Rumus umum untuk menghitung elemen ke- n dari barisan kuadrat adalah

$$Q(n) = n^2$$

Contoh barisan kuadrat: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Semua tiga barisan ini memiliki sifat-sifat khusus yang membuatnya menarik dalam matematika dan memiliki banyak aplikasi dalam berbagai masalah dan struktur.

Latihan

1. Tentukan apakah bilangan 123 dan 153 adalah bilangan istimewa.
2. Tentukan elemen ke-7 dari barisan triangular, barisan oblong, dan barisan kuadrat.
3. Tentukan elemen ke-10 dari barisan triangular, barisan oblong, dan barisan kuadrat.
4. Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1000 dan dapat dibagi habis oleh 37.
5. Buktikan bahwa ada dua bilangan bulat positif yang jumlahnya 100.
6. Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif yang lebih dari dua kali lipat bilangan bulat positif lainnya.

Induksi Matematika dan Teorema Binomial

2.1 Induksi Matematika

Induksi matematik merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Contoh 2.1. Benarkah pernyataan berikut ini?

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n + 1)$$

Untuk menjawab pertanyaan berikut kita dapat mensubstitusikan n dalam pernyataan tadi dengan n bilangan asli.

- Jika $n = 1$, maka $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1 + 1)$, diperoleh pernyataan yang benar.
- Jika $n = 2$, maka $1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2(2 + 1)$, diperoleh pernyataan yang benar.
- Jika $n = 3$, maka $1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3(3 + 1)$, diperoleh pernyataan yang benar.

Karena anggota bilangan asli itu ada tak berhingga banyaknya maka cara yang efisien yang dapat dilakukan adalah dengan menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika.

Sekarang kita akan menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika untuk membuktikan:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n + 1)$$

Bukti. .

Step 1. Misalkan $p(n)$ menyatakan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n + 1)$ sehingga $p(1)$ menyatakan $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1 + 1)$ yang mana pernyataan tersebut benar.

Step 2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , sehingga $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} \cdot k(k+1)$ merupakan pernyataan benar.

Step 3. Dengan memanfaatkan asumsi pada step 2, kita akan tunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{1}{2} \cdot (k+1)(k+2)$$

Hal ini bisa ditunjukkan dengan sedikit manipulasi berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1) \left(\frac{1}{2}k + 1 \right) \\ &= (k+1) \cdot \frac{1}{2}(k+2) \end{aligned}$$

Ternyata $1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{1}{2} \cdot (k+1)(k+2)$, sehingga $p(k+1)$ benar. Dengan demikian $p(n)$ juga benar untuk setiap bilangan asli n .

□

Contoh 2.2. Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ untuk semua bilangan asli n .

Bukti. .

Step 1. Misalkan $p(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ sehingga $p(1)$ menyatakan $1 = 1^2$ yang mana pernyataan tersebut benar.

Step 2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , sehingga $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$ merupakan pernyataan benar.

Step 3. Dengan memanfaatkan asumsi pada step 2, kita akan tunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

Hal ini bisa ditunjukkan dengan sedikit manipulasi berikut:

$$\begin{aligned}1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= (1 + 3 + \cdots + (2k - 1)) + (2k + 1) \\&= k^2 + (2k + 1) \\&= (k + 1)^2\end{aligned}$$

Ternyata $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$, sehingga $p(k + 1)$ benar. Dengan demikian $p(n)$ juga benar untuk setiap bilangan asli n . $\square$

2.2 Teorema Binomial

Teorema binomial banyak digunakan dalam penurunan beberapa teorema dan pemecahan masalah dalam matematika. Oleh karena itu penguasaan kemampuan-kemampuan tersebut sangat penting bagi mereka yang akan mempelajari matematika karena banyak bahasan dalam matematika yang menggunakan prinsip-prinsip tersebut untuk menurunkan teorema atau untuk pemecahan masalah.

Binom adalah suatu ungkapan yang memuat tepat dua suku yang dipisahkan oleh tanda $+$ atau $-$. Contohnya $(x + 2y)$ atau $(3x - 4y)$ dan lain sebagainya. Dalam pembahasan kali ini kita akan mengembangkan rumus penjabaran dari perpangkatan binom, yaitu rumus untuk $(a + b)^n$ dengan a , b bilangan real dan n bilangan asli. Perhatikan contoh-contoh berikut ini :

$$\begin{aligned}(a + b)^1 &= a + b \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan contoh-contoh tadi maka kita dapat mengambil suatu kesimpulan bahwa sifat-sifat perluasan dari $(a + b)^n$ adalah sebagai berikut:

- a Suku pertama adalah a^n dan suku terakhir adalah b^n .
- b Pangkat dari a mengecil dan pangkat dari b membesar.
- c Jumlah pangkat dari a dan pangkat dari b di setiap suku sama dengan n .
- d Terdapat $n + 1$ suku.

e Koefisien suku ke- r adalah $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ dengan $0 \leq r \leq n$.

Teorema 2.3 (Teorema Binomial). Untuk setiap bilangan bulat positif n dan setiap bilangan real a dan b , berlaku:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r\end{aligned}$$

Contoh 2.4. Penjabaran dari $(x + 3y)^3$ adalah:

$$\begin{aligned}(x + 3y)^3 &= \sum_{r=0}^3 \binom{3}{r} x^{n-r} (3y)^r \\ &= \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 (3y) + \binom{3}{2} x (3y)^2 + \binom{3}{3} (3y)^3 \\ &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3y + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 + 1 \cdot (3y)^3 \\ &= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3\end{aligned}$$

Contoh 2.5. Suku ke-7 dari $(x + 3y)^{10}$ adalah

$$\binom{10}{6} \cdot x^{10-6} \cdot (3y)^6 = 153090x^4y^6$$

Latihan

1. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut benar untuk setiap bilangan asli n .

a. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

b. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

c. $4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{n(3n + 5)}{2}$

d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

2. Gunakan Teorema binomial untuk menjabarkan bentuk berikut.

a. $(2x + 3y)^6$

b. $(x + 4y)^5$

c. $(5x + xy)^4$

3. Tentukan koefisien x^4y^4 dari hasil ekspansi berikut.

a. $(4x + 2y)^6$

b. $(7x + 3y)^7$

c. $(2x + 3xy)^5$

Basis Bilangan

3.1 Bilangan Basis Sepuluh (Desimal)

Bilangan basis sepuluh, juga dikenal sebagai sistem desimal, adalah sistem bilangan yang paling umum digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Bila banyaknya anggota suatu himpunan kelompok sepuluhnya ada sepuluh kelompok maka dijadikan kelompok baru yaitu kelompok ratusan.

Lambang bilangan dalam sistem bilangan dasar dengan basis sepuluh terdapat sepuluh buah yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Contoh bilangan dasar sepuluh diantaranya adalah sebagai berikut:

Contoh 3.1. $454 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Contoh 3.2. $3456_{(10)} = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

Sistem desimal sangat efisien dan mudah dipahami, terutama karena jumlah jari tangan manusia yang ada sepuluh. Itulah sebabnya sistem ini menjadi standar yang digunakan secara luas dalam berbagai aplikasi matematika dan kehidupan sehari-hari.

3.2 Bilangan Basis Dua (Biner)

Bilangan basis dua, atau juga dikenal sebagai sistem biner, merupakan sistem bilangan yang hanya menggunakan dua digit, yaitu 0 dan 1. Setiap digit dalam sebuah bilangan biner disebut "bit" (binary digit), dan setiap posisi digit dalam bilangan biner memiliki nilai tempat yang merupakan pangkat dari 2.

Contoh 3.3. $1001_{(2)}$ dan $101011_{(2)}$ adalah bilangan biner.

Bilangan biner dapat dikonversi menjadi desimal.

Contoh 3.4. $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5_{(10)}$

3.3 Bilangan Basis Delapan (Oktal)

Bilangan basis delapan, atau biasa disebut sistem oktal adalah sistem bilangan yang menggunakan delapan digit berbeda, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Setiap digit dalam bilangan oktal memiliki nilai tempat yang merupakan pangkat dari 8.

Bilangan oktal sering digunakan dalam bidang komputasi dan elektronika digital karena lebih mudah dibaca dan ditulis daripada bilangan biner. Setiap digit oktal dapat langsung dikonversi ke tiga digit biner, yang sangat berguna dalam representasi data di komputer. Selain itu, beberapa bahasa pemrograman dan sistem operasi menggunakan bilangan oktal untuk mewakili izin file dan alamat memori.

3.4 Bilangan Basis Enam Belas (Heksadesimal)

Bilangan basis enam belas, juga dikenal sebagai sistem heksadesimal, adalah sistem bilangan yang menggunakan enam belas digit. Karena bilangan yang sering kita kenal itu ada sepuluh buah maka kita memerlukan lima angka baru. Digit-digit yang digunakan dalam sistem heksadesimal adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Dalam sistem ini, setiap digit memiliki nilai tempat yang merupakan pangkat dari 16.

Contoh 3.5. $23_{(10)} = 1 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 17_{(16)}$

Contoh 3.6. $2A7_{(16)} = 2 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 512 + 10 \cdot 16 + 7 = 679_{(10)}$

3.5 Bilangan Basis untuk Pecahan

Sistem desimal diperkenalkan ke Eropa pada tahun 1202 oleh Leonardo Fibonacci dari Pisa dalam bukunya *Liber Abaci*. Namun, ini hanya berlaku untuk representasi bilangan bulat. Representasi desimal dari pecahan tidak benar-benar berkembang sampai tahun 1585 ketika Simon Stevin dari Flanders menerbitkan pamfletnya *De Thiende* bersamaan dengan terjemahan bahasa Prancisnya *La Disme*. Fibonacci sendiri menggunakan basis 60 (ditemukan oleh bangsa Babilonia kuno) untuk mengekspresikan pecahan (sesuatu seperti $10^\circ 13' 45'' \dots$ - tentu saja mengingatkan pada notasi derajat/menit/detik yang masih digunakan hingga saat ini).

Kita tahu bahwa, bilangan bulat M dalam basis $N > 0$ dapat diekspresikan sebagai

$$M = a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \dots + a_1 N^1 + a_0$$

Untuk menyertakan pecahan, seperti yang lazim dalam sistem desimal, kita diperbolehkan menggunakan pangkat negatif

$$M = a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \dots + a_1 N^1 + a_0 + a_{-1} N^{-1} + a_{-2} N^{-2} + \dots + a_{-m} N^{-m} + \dots$$

Dengan analogi pada sistem desimal, bentuk di atas dapat disederhanakan menjadi

$$M = (\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots})_N$$

di mana semua koefisien a_m memenuhi $0 \leq a_m < N$. Tanda koma (,) (atau dalam penulisan bahasa Inggris biasanya tanda titik (.)) di antara a_0 dan a_{-1} (atau bagian bilangan bulat dan pecahan) dikenal sebagai titik radix atau titik basis- N (biner, ternary, desimal, dll., tergantung pada basis yang digunakan). Prosedur yang terpisah berlaku untuk konversi bagian bilangan bulat (yang berada di sebelah kiri titik radix) dan bagian pecahan (yang berada di sebelah kanan titik radix). Di sini saya akan membahas prosedur yang terakhir.

Contoh 3.7. Sebagai contoh, $\frac{1}{4}$ diklaim sama dengan $(0.020202\dots)_3$ yang memenuhi syarat sebagai anggota himpunan *Cantor* C_0 . Mari kita verifikasi fakta ini.

Kita mencari representasi

$$0,25 = a_{-1}3^{-1} + a_{-2}3^{-2} + a_{-3}3^{-3} + \dots$$

dengan a_m adalah 0, 1, atau 2. Kalikan persamaan ini dengan 3:

$$0,75 = a_{-1} + a_{-2}3^{-1} + a_{-3}3^{-2} + \dots$$

dan perhatikan bahwa di sebelah kiri kita masih memiliki pecahan murni sementara di sebelah kanan a_{-1} adalah bilangan bulat. Kedua sisi hanya dapat sama jika $a_{-1} = 0$. Jadi kita sebenarnya memiliki

$$0,75 = a_{-2}3^{-1} + a_{-3}3^{-2} + \dots$$

Kalikan lagi dengan 3:

$$2,25 = a_{-2} + a_{-3}3^{-1} + \dots$$

Jika dua bilangan sama, bagian bilangan bulat dan pecahannya harus sama. Jadi kita memiliki $2 = a_{-2}$ dan

$$0,25 = a_{-3}3^{-1} + a_{-4}3^{-2} + \dots$$

Algoritmanya sederhana: terus kalikan dengan 3 (atau radix N dalam kasus umum), singkirkan bagian bilangan bulat yang diperoleh dan tulis secara berurutan. Jelas, dalam kasus $\frac{1}{4}$ dan $N = 3$, kita akan memiliki pecahan periodik $\frac{1}{4} = (0.020202\dots)_3$ dengan $a_{-3} = 0$ dan $a_{-4} = 2$, dan seterusnya.

Kita dapat memverifikasi ekspresi untuk $\frac{1}{4}$ melalui rumus untuk jumlah deret geometrik. Untuk $0 < |q| < 1$,

$$a_0 + a_0 q^{-1} + a_0 q^{-2} + \dots = \frac{a_0}{1 - q} \quad (3.1)$$

Memang,

$$\begin{aligned} (0.020202\dots)_3 &= 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-6} + \dots \\ &= 2 \cdot 9^{-1} + 2 \cdot 9^{-2} + \dots \\ &= \frac{2 \cdot 9^{-1}}{1 - \frac{1}{9}} \end{aligned}$$

yang akhirnya memberikan $\frac{1}{4}$.

Contoh 3.8. Mari kita representasikan $\frac{1}{2}$ dalam basis 5.

Perhatikan bahwa $0.5 \cdot 5 = 2.5$. Oleh karena itu, $a_{-1} = 2$ dan bagian pecahan yang tersisa masih sama, yaitu 0.5. Oleh karena itu, $\frac{1}{2} = (0.22222\dots)_5$ yang sekali lagi dapat diverifikasi dengan rumus penjumlahan 3.1 bahwa $(0.22222\dots)_5 = \frac{2/5}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$.

Contoh 3.9. $(0.002002002\dots)_3 = \frac{2/27}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{1}{13}$.

Sekarang Anda dapat memverifikasi bahwa

$$\begin{aligned} \pi &= (3.1415926535\dots)_{10} \\ &= (11.00100100001111\dots)_2 \\ &= (10.0102110\dots)_3 \\ &= (3.066365\dots)_7 \\ &= (3.124188\dots)_9 \\ &= (3.243F6\dots)_{16} \end{aligned}$$

Latihan

1. Ubahlah bilangan-bilangan 23, 45, 412 ke dalam basis bilangan:

- a. Bilangan basis dua
- b. Bilangan basis lima
- c. Bilangan basis tujuh
- d. Bilangan basis delapan
- e. Bilangan basis dua belas
- f. Bilangan basis lima belas

2. Ubahlah ke dalam bentuk desimal!

- a. $1011001_{(2)}$
- b. $43525_{(8)}$
- c. $A8543_{(12)}$
- d. $BA765_{(15)}$
- e. $0,4_{(7)}$
- f. $0,6_{(12)}$
- g. $3,A_{(12)}$

3. Hitunglah

- (a) $1234_{(5)} + 432_{(5)} = \dots\dots_{(5)}$
- (b) $BA2_{(12)} + B29_{(15)} = \dots\dots_{(8)}$
- (c) $BA4_{(12)} - AAA_{(12)} = \dots\dots_{(12)}$
- (d) $10010_{(2)} - 1011_{(2)} = \dots\dots_{(5)}$
- (e) $123_{(5)} \cdot 321_{(5)} = \dots\dots_{(8)}$
- (f) $B7_{(12)} \cdot BA_{(12)} = \dots\dots_{(15)}$

Keterbagian

4.1 Pendahuluan

Definisi 4.1. Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b ditulis $a|b$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $b = ka$. Jika a tidak habis membagi b maka ditulis $a \nmid b$

Properti 4.2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku

1. Sifat Reflexive: $a | a$.
2. Sifat Keterbagian Trivial: $1 | a$ dan $a | 0$.
3. Sifat Symmetric: Jika $a | b$ dan $b | a$, maka, $a = \pm b$.
4. Sifat Transitive: Jika $a | b$ dan $b | c$, maka $a | c$.
5. Sifat Distributive: Jika $a | b$ dan $a | c$, maka $a | (b + c)$, atau $a | (bx + cy)$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}$.
6. Jika $a|b$, maka $a|bc$.
7. Jika $a|c$ dan $b|c$, maka $ab|c$.
8. Jika $a|b$ dengan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$
9. Jika diberikan $a \neq 0$ dan barisan $0, 1, 2, 3, \dots, |a| - 1$, maka selisih dua bilangan sembarang dalam barisan itu tidak habis dibagi oleh a .
10. Algoritma Pembagian: Untuk sembarang a dan b dengan $a > 0$, pasti terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r < a$.
11. Alternatif Algoritma Pembagian: Untuk sembarang a dan b dengan $a \neq 0$, pasti terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r < |a|$.

4.2 Bilangan Habis Dibagi

4.2.1 Bilangan Habis Dibagi Dua

Suatu bilangan habis dibagi dua jika bilangan yang diwakili oleh angka terakhirnya genap.

Bukti. Misalkan bilangan tersebut adalah

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $a_i \in \mathbb{N}$ untuk $0 \leq i \leq n$. Perhatikan bahwa untuk $1 \leq i \leq n$, 10^i pasti habis dibagi 2. Dengan demikian x akan habis dibagi 2 jika dan hanya jika a_0 habis dibagi 2. Dengan kata lain x akan habis dibagi 2 jika dan hanya jika digit terakhirnya habis dibagi 2. $\square$

Perhatikan bahwa untuk $2 \leq i \leq n$, maka 10^i pasti habis dibagi empat. Sehingga x akan habis dibagi empat jika dan hanya jika $a_1 \cdot 10 + a_0$ habis dibagi empat. Atau dengan kata lain, x akan habis dibagi empat jika dan hanya jika dua digit terakhirnya habis dibagi empat.

Contoh 4.3. Bilangan 20252026 habis dibagi 2 karena $2|6$.

Contoh 4.4. Bilangan 9999999999964 habis dibagi 4 karena $4|64$

Exercise 4.2.1. Dapat dibuktikan oleh pembaca bahwa hal ini berlaku untuk 2^n , yaitu bilangan x akan habis dibagi 2^n jika dan hanya jika n digit terakhirnya habis dibagi 2^n .

4.2.2 Bilangan Habis Dibagi Tiga

Suatu bilangan bulat habis dibagi tiga jika dan hanya jika jumlah digit penyusunnya habis dibagi tiga.

Bukti. Misalkan bilangan tersebut adalah

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Perhatikan bahwa $10^m \equiv 1 \pmod{3}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{3}$$

Dengan demikian x akan habis dibagi 3 jika dan hanya jika $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ habis dibagi 3. Atau dengan kata lain jumlah digitnya harus habis dibagi 3. $\square$

Exercise 4.2.2. Gunakan cara di atas untuk membuktikan ciri bilangan yang habis dibagi 9.

4.2.3 Bilangan Habis Dibagi Lima

Suatu bilangan bulat habis dibagi lima jika dan hanya jika digit terakhirnya habis dibagi lima.

Bukti. Misalkan bilangan tersebut adalah

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Perhatikan bahwa untuk $1 \leq i \leq n$, maka 10^i habis dibagi 5. Dengan demikian tersisa $x \equiv a_0 \pmod{5}$. Atau dengan kata lain, x akan habis dibagi lima jika dan hanya jika a_0 , yaitu digit terakhirnya habis dibagi lima. $\square$

Perhatikan bahwa untuk $2 \leq i \leq n$, maka 10^i habis dibagi 25. Sehingga $x \equiv a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod{25}$. Dengan kata lain, x akan habis dibagi 25 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya habis dibagi 25.

Contoh 4.5. Bilangan 12345 dan 43210 keduanya habis dibagi 5.

Contoh 4.6. Karena $25|25$, maka 202720262025 adalah bilangan yang habis dibagi 25

Exercise 4.2.3 Buktikan bahwa suatu bilangan bulat akan habis dibagi 5^k jika dan hanya jika k digit terakhirnya habis dibagi 5^k .

4.2.4 Bilangan Habis Dibagi Enam

Karena $6 = 2 \cdot 3$, maka:

Suatu bilangan bulat akan habis dibagi enam jika dan hanya jika bilangan tersebut habis dibagi dua dan tiga.