



Dedi Nurjamil
Sinta Verawati Dewi
Sandy Ihsan Amarulloh

PENGANTAR

TEORI BILANGAN

PENGANTAR TEORI BILANGAN

Dedi Nurjamil
Sinta Verawati Dewi
Sandy Ihsan Amarulloh



PENGANTAR TEORI BILANGAN

Penulis:
Dedi Nurjamil
Sinta Vrawati Dewi
Sandy Ihsan Amarulloh

Editor:
Erik Santoso

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Juli 2024

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 18 x 25cm
ISBN : 978-623-448-959-0

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT. Salawat serta salam semoga terlimpah curah kepada nabi besar Muhammad SAW. Atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul **“Pengantar Teori Bilangan”** ini.

Buku ini dilengkapi dengan soal-soal latihan pada setiap akhir bab dan terdapat satu bab berisi kumpulan soal dari berbagai sumber yang dicantumkan yang bertujuan untuk menguji pemahaman dan mengasah kemampuan pembaca akan setiap materi yang telah disajikan. Selain itu, penulisan buku ini bertujuan untuk menghasilkan bahan ajar pengantar teori bilangan yang sesuai dengan karakteristik mahasiswa, serta sesuai dengan karakteristik materi teori bilangan yang banyak memuat definisi, konsep, dan teorema.

Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu, sehingga buku ini dapat terselesaikan tepat waktu dan dapat digunakan sebagaimana mestinya. Penulis berharap buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa program studi Pendidikan Matematika di dan bagi pecinta ilmu pengetahuan pada umumnya.

Sebagai penutup, pepatah bijak mengatakan tak ada gading yang tak retak. Oleh karena itu, penulis menerima saran dan kritik dari pembaca yang bersifat membangun akan kami terima guna pengembangan buku ini secara berkelanjutan.

Juli 2024, Penulis

Daftar Isi

1 | Sistem Numerasi

1.1	Pendahuluan	1
1.2	Sistem Numerasi Ijir	2
1.3	Sistem Numerasi Mesir Kuno	2
1.4	Sistem Numerasi Babylonia	3
1.5	Sistem Numerasi Alphabet Yunani	4
1.6	Sistem Numerasi Cina	5
1.7	Sistem Numerasi Maya	6
1.8	Sistem Numerasi Romawi	7
1.9	Sistem Numerasi Attika	8
1.10	Sistem Numerasi Hindu Arab	9

13 | Bilangan

2.1	Pendahuluan	13
2.2	Bilangan Kardinal	13
2.3	Bilangan Ordinal	13
2.4	Bilangan Asli	14
2.5	Bilangan Cacah	15
2.6	Bilangan Bulat	16
2.7	Bilangan Rasional	16
2.8	Bilangan Irasional	16
2.9	Bilangan Real	17
2.10	Bilangan Imajiner	17
2.11	Bilangan Kompleks	18

21 | Bilangan Bulat

3.1	Pendahuluan	21
3.2	Bilangan Istimewa	21
3.3	Well Ordering Principle	23
3.4	Sifat Archimedes	24
3.5	Pembuktian Sifat Archimedes	25
3.6	Barisan Istimewa	25

28 | Induksi Matematika dan Teorema Binomial

4.1	Induksi Matematika	28
4.2	Teorema Binomial	30

33 | Basis Bilangan

5.1	Bilangan Basis Sepuluh (Desimal)	33
5.2	Bilangan Basis Dua (Biner)	33
5.3	Bilangan Basis Delapan (Oktal)	34
5.4	Bilangan Basis Enam Belas (Heksadesimal)	34
5.5	Bilangan Basis untuk Pecahan	34

38 | Keterbagian

6.1	Pendahuluan	38
-----	-------------------	----

6.2	Bilangan Habis Dibagi	39
6.2.1	Bilangan Habis Dibagi Dua	39
6.2.2	Bilangan Habis Dibagi Tiga	39
6.2.3	Bilangan Habis Dibagi Lima	40
6.2.4	Bilangan Habis Dibagi Enam	40
6.2.5	Bilangan Habis dibagi Sebelas	41

43 | FPB dan KPK

7.1	Faktor Persekutuan Terbesar	43
7.2	Kelipatan Persekutuan Terkecil	45

47 | Algoritma Euclid

8.1	Pendahuluan	47
8.2	Penggunaan	47
8.3	Lainnya	49

52 | Persamaan Diopanthine

9.1	Definisi	52
9.2	Penggunaan	52

55 | Bilangan Prima

10.1	Pendahuluan	55
10.2	Definisi	56
10.3	Contoh Masalah	57

61 | Aritmetika Jam dan Aritmetika Moduler

11.1	Aritmetika Jam	61
11.2	Aritmetika Moduler	62

64 | Kongruensi

12.1	Modulo	64
12.2	Relasi Ekuivalensi	65
12.3	Kongruensi Linear	67
12.4	Kongruensi Tingkat Tinggi	69
12.4.1	Kongruensi Kuadrat	69
12.4.2	Kongruensi Polinom Bilangan Bulat	70

72 | Teorema Sisa Cina

13.1	Sejarah	72
13.2	Pembuktian	72
13.3	Langkah Penyelesaian	74

77 | Teorema Fermat dan Teorema Wilson

14.1	Teorema Fermat	77
14.2	Teorema Wilson	80

83 | **Fungsi Bilangan Teoritik**

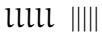
15.1	Definisi	83
15.2	Sifat	84

87 | **Kumpulan Soal Latihan**

Sistem Numerasi

1.1 Pendahuluan

Teori tentang bilangan telah menarik perhatian ilmuwan selama ribuan tahun, paling sedikit sejak 2500 tahun yang lalu. Sebagai salah satu cabang ilmu matematika, teori bilangan disebut sebagai Aritmetika lanjut (Advanced Aritmetics) karena berkaitan dengan sifat-sifat bilangan asli.

Sistem numerasi adalah sekumpulan lambang dan aturan pokok untuk menuliskan bilangan. Lambang yang menyatakan suatu bilangan dinamakan numeral atau lambang bilangan. Petunjuk mengenai awal manusia mengenal hitungan ditemukan oleh arkeolog Karl Absalom pada tahun 1930 dalam sebuah potongan tulang serigala yang diperkirakan berumur 30.000 tahun. Pada potongan tulang itu ditemukan goresan-goresan kecil yang tersusun dalam kelompok-kelompok yang terdiri atas lima, seperti . Sehingga tidak diragukan lagi bahwa orang-orang primitif sudah memiliki pengertian tentang bilangan dan mengerjakannya dengan metode ijin (tallies).

Jadi dapat kita buktikan bahwa orang terdahulu telah mengenal tulisan namun mereka tidak menggunakan angka untuk menghitung tetapi mereka menggunakan lambang-lambang yang telah mereka sepakati. Mereka menggunakan lambang itu untuk simbol dari perhitungan yang telah mereka lakukan.

Banyaknya suku bangsa di dunia mengakibatkan banyaknya sistem numerasi yang berbeda-beda. Oleh karena itu suatu bilangan dapat dinyatakan oleh bermacam-macam lambang bilangan, tetapi suatu lambang bilangan tertentu hanya menunjukkan pada satu bilangan saja.

Sampai sekarang kita telah mengenal bermacam-macam sistem numerasi, diantaranya sistem numerasi Ijin, Mesir Kuno, Babilonia, Alphabet Yunani, Cina-Jepang, Maya, Romawi, Attika, dan Hindu Arab.

1.2 Sistem Numerasi Ijir

Perhitungan yang paling terdahulu dan sederhana adalah perhitungan dengan memakai sistem korespondensi $1-1$, sistem ini dinamakan sistem numerasi Ijir (Tally). Caranya dengan memakai goresan atau memakai tongkat untuk satu objek yang dihitung.

Contoh sistem numerasi Ijir :

- Bila seseorang memiliki tiga ekor sapi maka ia akan menyusun tongkat sebanyak tiga buah, atau membuat goresan sebanyak tiga goresan, yaitu : $///$
- Jika ada sebuah keluarga memiliki tiga ekor kambing lalu digabungkan dengan empat ekor kambing lainnya maka mereka menyusun tongkat sebanyak tujuh buah, atau mereka membuat goresan sebanyak tujuh goresan, yaitu : $||||| ||$

1.3 Sistem Numerasi Mesir Kuno

Sekitar 3400 SM bangsa Mesir telah mengenal tulisan *Hieroglyphics* (tulisan Mesir Kuno). Tulisan ini mereka tulis pada batu, papyrus, kayu, barang pecah belah dan lain sebagainya. Posisi atau tempat dari setiap lambang bilangan tidak mempengaruhi nilai dari suatu bilangan.

Lambang-lambangnya sebagai berikut:

	= 1	tongkat (stroke)
	= 10	tulang tumit (heel bone)
	= 100	gulungan surat (scroll)
	= 1000	bunga teratai (lotus flower)
	= 10 000	jari telunjuk (a pointing finger)
	= 100 000	ikan burbot (burbot fish)
	= 1000 000	orang astronis (astronished man)

Contoh 1.1. Contoh:

- $4 = ||||$
- $22 = ||||| ||$ atau $|||| ||||$
- $123 = ||||| ||||$ atau $|||| |||| ||$

1.4 Sistem Numerasi Babylonia

Bangsa Babylonia telah mengenal angka sekitar 2000 – 20 SM. Angka yang mereka gunakan hanya mempunyai dua lambang bilangan dasar yaitu :

$$\nabla = 1 \text{ dan } \triangleleft = 10$$

Posisi dari setiap lambang bilangan tidak boleh diubah karena akan memengaruhi nilai dari bilangan tersebut. Sistem numerasi ini merupakan sistem numerasi aditif yang dipadukan dengan sistem posisi (nilai tempat). Tulisan Babylonia ini disebut juga *Cunieform* yang biasa ditulis pada tanah liat dengan menggunakan ujung tongkat. Beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Babilonia, di antaranya:

1. Untuk menyederhanakan penulisan lambang bilangan, digunakan simbol pengurangan. Simbol tersebut adalah $\nabla \triangleright$
2. Untuk bilangan yang lebih besar dari 60 digunakan bilangan dasar 60. Untuk menghindari kekeliruan dipakai tanda selang "^".

Contoh 1.2. Contoh:

- $23 = \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$
- $37 = \triangleleft \triangleleft \nabla \triangleright \nabla \nabla \nabla$
 $\triangleleft \triangleleft$
- $62 = 1 \cdot 60 + 2 = \nabla^{\wedge} \nabla \nabla$
- $4000 = 1 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 40$
 $= \nabla^{\wedge} \nabla \nabla \nabla^{\wedge} \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft$
 $\nabla \nabla \nabla$

1.5 Sistem Numerasi Alphabet Yunani

Sekitar tahun 450 SM bangsa Ionia dari Yunani telah mengembangkan suatu sistem numerasi yaitu Alphabet Yunani yang terdiri dari 27 huruf. Bilangan dasar yang mereka gunakan adalah 10. Huruf-huruf alphabet tersebut mempunyai nilai-nilai sebagai berikut :

Nilai	Lambang	Nama	Nilai	Lambang	Nama
1	α	alpha	60	ξ	xi
2	β	beta	70	$\omicron$	omicron
3	γ	gamma	80	π	pi
4	δ	delta	90	κ	obselet kappa
5	ϵ	epsilon	100	ρ	rho
6	ζ	obselet digamma	200	σ	sigma
7	ζ	zeta	300	τ	tau
8	η	eta	400	υ	upsilon
9	θ	theta	500	φ	phi
10	ι	iota	600	χ	chi
20	κ	kappa	700	ψ	psi
30	λ	lambda	800	ω	omega
40	μ	mu	900	$\sampi$	obselet sampi
50	ν	nu			

Beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Alphabet Yunani, diantaranya :

- Untuk menyatakan ribuan, di atas sembilan angka dasar yang pertama dari α sampai θ dibubuhi tanda aksen (').
- Untuk kelipatan 10.000 dinyatakan dengan meletakkan angka yang bersangkutan di atas tanda M.

Contoh 1.3. Contoh:

- $15 = \iota\epsilon$
- $726 = \psi\kappa F$
- $8000 = \eta'$
- $10000 = M^{\alpha}$

1.6 Sistem Numerasi Cina

Angka tradisional Cina – Jepang menggunakan pengelompokkan dengan bilangan dasar 10. Di samping itu sistem angka ini juga mempunyai sistem pengelompokkan perkalian (multiplikatif). Keunikan dari sistem numerasi Cina yaitu penulisannya dari atas ke bawah. Perhatikan tabel berikut.

Nilai	Notasi	Cina	Jepang
1	一	yī	ich
2	二	èr	ni
3	三	sān	san
4	四	sì	roku/yon
5	五	wǔ	go
6	六	liù	roku
7	七	qī	shici/nana
8	八	bā	hachi
9	九	jiǔ	kyū
10	十	shí	jū
10^2	百	bǎi	hyaku
10^3	千	qiān	sen
10^4	万	wàn	man
10^5	十万	shí wàn	ich man
10^6	百万	bǎi wàn	hyaku man
10^7	千万	qiān wàn	sen man

Tabel nilai, notasi, dan pelafalan bilangan Cina-Jepang

Bilangan wàn/man adalah unit dasar untuk bilangan yang lebih besar, dengan kata lain, bilangan besar sering dinyatakan dalam kelipatan 10000 (万) daripada kelipatan 1000 seperti dalam sistem internasional. Selain itu, terdapat perbedaan pula dalam penulisan 10^8 . Perhatikan Tabel berikut.

Nilai	Cina	Jepang
10^8	亿 yì	億 oku
10^9	十亿 shí yì	十億 jū oku
10^{10}	百亿 bǎi yì	百億 hyaku oku
10^{11}	千亿 qiān yì	千億 sen oku
10^{12}	兆 zhào	兆 chō

Contoh 1.4. Perhatikan contoh berikut,

- 二 dua èr nǐ
- 29 = 十 puluh shí jiǔ
- 九 sembilan jiǔ kyū

Sehingga 29 dibaca *èr shí jiǔ* dalam bahasa Cina dan dibaca *nǐ jiǔ kyū* dalam bahasa Jepang.

- 五 lima wǔ go
- 千 ribu qiān sen
- 六 enam liù rokku
- 5624 = 百 ratus bǎi kyaku
- 二 dua èr nǐ
- 十 puluh shí jū
- 四 empat sì yon

Sehingga 5624 dibaca *wǔ qiān liù bǎi èr shí sì* dalam bahasa Cina atau *gosen rokkukyaku nǐ jūgo* dalam bahasa Jepang.

- 四 empat sì yon
- 千 ribu qiān sen
- 三 tiga sān san
- 4315 =
- 百 ratus bǎi kyaku
- 十 puluh shí jū
- 五 lima wǔ go

Pada contoh 4315, koefisien puluhnya yaitu satu/yī/ich (一/一) tidak ditulis. Bilangan tersebut ditulis empat ribu tiga ratus puluh lima yang artinya sepuluh ditambah dengan lima. Sehingga hanya dibaca *sì qiān sān bǎi shí wǔ* dalam bahasa Cina atau *yonsen sankyaku jūgo* dalam bahasa Jepang.

1.7 Sistem Numerasi Maya

Suku Maya adalah kelompok suku yang tinggal di Semenanjung Yukatan, Amerika Tengah yang berbatasan dengan Samudera Pasifik di sebelah barat, dan Laut Karibia di sebelah timur.

Suku yang pada zaman batu mencapai kejayaan di bidang teknologinya (250 M hingga 925 M), menghasilkan bentuk karya dan peradaban unik seperti bangunan *Chichen Itza*, pertanian *kanal drainase*, tanaman jagung, sumurnya yang disebut "*cenotes*".

Sistem numerasi Maya ditemukan pertama kali oleh Francisco de Cordoba pada tahun 1517 M di kota Mexico tepatnya di daerah Yukatan. Keistimewaan sistem numerasi Maya ini adalah telah memiliki lambang bilangan nol. Lambang dari sistem numerasi Maya ini berupa garis dan noktah. Simbol-simbol dasar yang dipakai dalam sistem numerasi maya adalah sebagai berikut:

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Notasi Vigesimal Bangsa Maya

Ada beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Maya, diantaranya:

- Untuk bilangan yang lebih kecil dari 19 dipakai bilangan dasar 20.
- Untuk bilangan-bilangan yang lebih besar lagi, maka menggunakan bilangan dasar: $(18 \cdot 20^0)$, $(18 \cdot 20^1)$, $(18 \cdot 20^3 \dots)$, $(18 \cdot 20^n)$.
- Ditulis dari atas ke bawah.

Contoh 1.5. Perhatikan bahwa $2024 = 5 \cdot (18 \cdot 20^1) + 0 \cdot (18 \cdot 20^0) + 11 \cdot 20 + 4$. Maka notasi vigesimal Maya dari 2024 adalah

$$\begin{array}{c} \text{—} \\ | \\ \text{O} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array} = 2024$$

Contoh lain, notasi vigesimal Maya dari $43486 = 6 \cdot (18 \cdot 20^2) + 0 \cdot (18 \cdot 20^1) + 14 \cdot 20 + 6$ adalah

$$\begin{array}{c} \text{—} \\ | \\ \text{O} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array} = 43486$$

1.8 Sistem Numerasi Romawi

Sistem numerasi Romawi sudah ada sejak tahun 260 SM. Sistem numerasi Romawi yang ada sekarang merupakan modernisasi dari sistem yang lama. Misalnya lambang IV sistem lamanya /////. Sistem numerasi Romawi menggunakan bilangan dasar 10. Lambang-lambang dasarnya adalah:

1	= I
10	= X
100	= C
1000	= M
5	= V
50	= L
500	= D

Beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Romawi, diantaranya:

1. Bila satu angka terdiri atas dua lambang dasar maka nilai bilangan yang ditunjukkan adalah:
 - Sama dengan jumlah nilai kedua bilangan itu jika lambang dari nilai yang paling tinggi terletak di sebelah kiri.
 - Sama dengan selisih nilai kedua bilangan itu jika lambang dari nilai yang paling tinggi terletak disebelah kanan.
 - Lambang bilangan yang sama jika ditulis berurutan paling banyak tiga angka.

2. Pengurangan mempunyai aturan sebagai berikut:

- I hanya dapat dikurangkan dari V dan X.
- X hanya dapat dikurangkan dari L dan C.
- C hanya dapat dikurangkan dari D dan M.

3. Untuk menuliskan bilangan yang lebih besar dipakai sistem perkalian yang ditunjukkan dengan tanda tertentu, yaitu:

- Sebuah strip (ruas garis) di atas lambang bilangan tertentu menunjukkan nilai yang sama dengan seribu kali nilai bilangan itu.
- Dua buah strip di atas lambang bilangan tertentu menunjukkan nilai yang sama dengan sejuta kali bilangan itu.

Contoh 1.6. Contoh sistem numerasi Romawi:

- $VI = 5 + 1 = 6$
- $IV = 5 - 1 = 4$
- $40 = 50 - 10 = XL$
- $49 = (50 - 10) + (10 - 1) = XLIX$
- $\overline{X} = 10 \cdot 1000 = 10\,000$
- $\overline{\overline{L}} = 50 \cdot 1\,000\,000 = 50\,000\,000$

1.9 Sistem Numerasi Attika

Sistem numerasi ini pernah digunakan oleh orang-orang Yunani Kuno di daerah *Attika* dan berkembang sekitar abad ke-3 sebelum masehi. Angka ini dikenal sebagai *Angka Herodianika* karena pertama kali dijelaskan dalam naskah abad ke-2 oleh *Herodianos*, atau sebagai *Angka Akrofonik* karena simbol dasar berasal dari huruf pertama alfabet Yunani yang diwakili oleh simbol tersebut.

Angka Attika memakai bilangan dasar 10 (desimal) dan lambang-lambanganya adalah:

I		$= 10^0 = 1$
Δ	ΔEKA (Deka)	$= 10^1 = 10$
H	HεKATON (Hekaton)	$= 10^2 = 100$
X	XIΛIOI (khilioi)	$= 10^3 = 1000$
M	MYPIOI (myrioi)	$= 10^4 = 10\,000$

Lambang bilangan untuk nol belum ada, yang ada adalah lambang yang digunakan sebagai penyingkat yaitu " Γ " yang artinya 5. Jika digabungkan dengan simbol lain, maka artinya adalah lima kali dari lambang yang tertulis.

Contoh 1.7. Perhatikan contoh berikut.

- $\Delta\Delta\Delta\Delta = \overline{\Delta} = 50$
- $\Delta\Delta\Gamma\text{II} = 27$
- $\overline{\Delta}\Gamma = 55$
- $\text{XXH}\Delta\Delta\Delta\text{III} = 2143$
- $\overline{\text{I}}\text{MMXXX}\overline{\text{I}}\text{HHH}\Delta\Gamma\text{III} = 63729$

1.10 Sistem Numerasi Hindu Arab

Pada tahun 775 M wilayah kekuasaan Arab terpecah menjadi dua, yaitu wilayah bagian barat yang berpusat di *Cordoba* dan wilayah bagian timur yang berpusat di *Bagdad*. Dengan sendirinya perkembangan ilmu pengetahuan dan peradabannya berbeda termasuk tulisan arab dan numerasinya.

Sistem numerasi Arab yang kita kenal sekarang adalah adopsi dari numerasi Arab wilayah bagian timur. Keistimewaan dari numerasi Arab ini adalah telah menggunakan sistem posisi dengan bilangan dasar 10. Walaupun penulisan dengan huruf Arab dari kanan ke kiri, tetapi untuk penulisan lambang bilangan tetap dari kiri ke kanan.

Angka arab barat adalah keturunan dari angka arab timur, sedangkan angka Arab timur sendiri diadopsi dari angka India dan sistem angka Hindu-Arab yang dikembangkan oleh matematikawan India, yang membaca urutan angka seperti "975" sebagai satu bilangan yang utuh.

Angka India kemudian diadopsi oleh matematikawan Persia di India, dan diteruskan lebih lanjut kepada orang-orang Arab di sebelah barat yang kemudian dikenal dengan sebutan angka arab timur, karena dipakai oleh orang-orang Arab bagian timur seperti Arab Saudi, Iraq, dan Levant. Bentuk angka-angka arab timur kemudian mengalami perubahan saat mereka diteruskan ke wilayah Afrika Utara. Melalui orang Arab di Afrika Utara tersebut akhirnya angka tersebut dikenal oleh orang-orang Eropa. Akhirnya mencapai bentuk Eropanya (bentuk yang sekarang) pada saat mencapai Afrika Utara, dan dari sana penggunaan mereka menyebar ke Eropa pada Abad Pertengahan. Dikarenakan sistem angka ini dikenalkan kepada bangsa Eropa oleh orang-orang Arab, maka dalam istilah bahasa Inggris angka ini dikenal dengan istilah angka Arab.

Arab Barat	Arab Timur
0	.
1	١
2	٢
3	٣
4	٤
5	٥
6	٦
7	٧
8	٨
9	٩

Contoh 1.8. Contoh numerasi Arab:

- $234 = ٢٣٤$
- $2864 = ٢٨٦٤$
- $6589 = ٦٥٨٩$

Latihan

1. Ubahlah bilangan-bilangan ke dalam sistem numerasi berikut ini:

12	234	1342	32417
24	135	3421	45325
45	654	4537	54321
45	456	6789	76589
65	897	9876	98765

- Sistem Numerasi Ijir (Tally);
 - Sistem Numeasi Mesir Kuno;
 - Sistem Numerasi Babylonia;
 - Sistem Numerasi Alphabet Yunani;
 - Sistem Numerasi Cina – Jepang;
 - Sistem Numerasi Maya;
 - Sistem Numerasi Romawi;
 - Sistem Numerasi Attika;
 - Sistem Numerasi Arab.
2. Selesaikan operasi di bawah ini.

a.	$\begin{array}{r} \omega\pi\eta \\ \varphi\xi\epsilon + \\ \hline \dots\dots \end{array}$	c.	$\begin{array}{r} \text{DCCXXVIII} \\ \text{DLII} - \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$
b.	$\begin{array}{r} \text{MDCCXXXI} \\ \text{DCCCLXXIV} + \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$	d.	$\begin{array}{r} \text{DCXLVIII} \\ \text{CCXLIV} \times \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$

3. Hasil pengurangan $\overline{\text{I}\Delta\Delta\Delta\Delta\Gamma\text{I}}$ oleh $\Delta\Delta\Gamma\text{III}$ adalah ...

Bilangan

2.1 Pendahuluan

Bilangan dalam matematika seperti halnya titik, garis dan bidang merupakan konsep awal (*primitive concept*) yaitu unsur yang bersifat mendasar sering dipakai tetapi tidak pernah dapat didefinisikan dengan tepat. Sehingga apabila ditanyakan apakah bilangan itu jawabannya tak akan pernah tepat dan selalu menimbulkan perdebatan. Tetapi jika yang dinyatakan bilangan asli atau bilangan cacah maka jawabannya akan jelas dan pasti.

Bilangan adalah suatu unsur dalam matematika yang tidak dapat didefinisikan. Kita harus bisa membedakan antara bilangan dengan angka. Bilangan adalah nilai dalam lambang bilangan, sedangkan angka adalah lambang dari sebuah bilangan.

Contoh: bilangan *seratus tiga puluh enam*. Dalam Numerasi Hindu Arab ditulis 136 dan kita sebut sebagai sebuah bilangan. Bilangan tersebut terdiri dari tiga buah angka yaitu 1, 2, dan 3.

2.2 Bilangan Kardinal

Bilangan Kardinal adalah bilangan yang dipergunakan untuk menyatakan banyaknya suatu objek.

Contoh yang merupakan bilangan kardinal:

- Paman membeli 3 ekor sapi.
- Aku adalah anak bungsu, kakakku berjumlah 5 orang.
- Diketahui himpunan $\{1, 3, 5, \dots, 13\}$ banyaknya anggota dalam himpunan tersebut ada 7.

2.3 Bilangan Ordinal

Bilangan Ordinal adalah bilangan yang dipergunakan untuk menyatakan urutan (*rank*).

Contoh yang merupakan bilangan ordinal :

- SMAN 3 Bandung merupakan sekolah favorit pada tahun ini.

- Dia adalah anak ke—3 dari 5 bersaudara.
- Di kelasnya Irma mendapat juara *pertama*.

2.4 Bilangan Asli

Bilangan Asli (*Natural Number*) adalah bilangan yang dipergunakan untuk membilang atau menghitung satu-satu. Himpunan bilangan asli biasanya dinotasikan dengan $\mathbb{N}$, diambil dari huruf awal kata *Natural*, dimana $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Himpunan bilangan asli dapat digolongkan menjadi beberapa macam diantaranya adalah:

1. Bilangan genap positif, yaitu bilangan asli yang habis dibagi dua, artinya jika bilangan tersebut dibagi dua maka hasilnya tidak bersisa (bersisa nol).

Ditulis: $\{2, 4, 6, \dots\}$

Atau: $\text{Genap} = \{x | x = 2n, \text{ dengan } n \in \mathbb{N}\}$.

2. Bilangan ganjil positif, yaitu bilangan asli yang tidak habis dibagi dua, artinya jika bilangan tersebut dibagi dua selalu bersisa satu.

Ditulis: $\{1, 3, 5, \dots\}$

Atau: $\text{Ganjil} = \{y | y = 2n - 1, \text{ dengan } n \in \mathbb{N}\}$

3. Bilangan prima positif Yaitu bilangan asli yang memiliki tepat dua faktor pembagi yang positif, artinya bilangan tersebut hanya habis dibagi oleh satu dan oleh bilangan itu sendiri.

Ditulis: $\{2, 3, 5, 7, \dots\}$

Formula untuk menentukan bilangan prima diantaranya sebagai berikut:

- Mersenne Prime Yaitu bilangan prima yang berbentuk $2^n - 1$, ditemukan dengan menggunakan komputer oleh *Laura Nickel* dan *Curt* berkebangsaan Amerika Serikat pada tahun 1979.
- Bilangan Permat Yaitu bilangan prima yang berbentuk $F_n = 2^{2^n} + 1$, berlaku untuk $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Prima Euleur, yaitu bilangan prima yang berbentuk:
 $n^2 - n + 41$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots, 40$, dan
 $n^2 + n + 17$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 15$
- Legendre Yaitu bilangan prima yang berbentuk: $n^2 + n + 41$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots, 39$, dan
 $n^2 + 29$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 28$

- Escott Yaitu bilangan prima yang berbentuk:
 - $n^2 - 79n + 1601$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 79$.
 - $n^3 + n^2 + 71$ untuk $n = -14, -13, -11, \dots, 9, 10$.
 - $n^2 + n + 41$ untuk $n = -40, -39, -38, \dots, -1$
 - Miot Yaitu bilangan prima yang berbentuk: $n^2 - 2999n + 2248541$ untuk bilangan bulat $1460 < n < 1539$, dan $n^3 - n^2 - 17$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 24$.
 - Charbert Yaitu bilangan prima yang berbentuk $3n^2 + 3n + 1$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots, 11$.
4. Bilangan tersusun (*Composite*), yaitu bilangan asli yang mempunyai faktor positif lebih dari dua buah, atau dengan kata lain bilangan komposit adalah bilangan asli yang bukan merupakan bilangan prima. Bilangan tersebut adalah $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots\}$.
 5. Bilangan 1, bukan merupakan bilangan tersusun juga bukan merupakan bilangan prima.
 6. Bilangan sempurna, yaitu bilangan yang jumlah faktornya adalah sama dengan bilangan tersebut kecuali faktor yang sama dengan bilangan itu sendiri. Berdasarkan penelitian bilangan sempurna dapat dirumuskan sebagai berikut:
 $P = (2^{n-1})(2^n - 1)$ dengan n adalah bilangan asli dan $(2^n - 1)$ adalah bilangan prima.
 Contoh: 6 merupakan bilangan sempurna karena faktor-faktornya 1, 2, dan 3. Jika bilangan-bilangan tersebut dijumlahkan $1 + 2 + 3$ hasilnya adalah 6.

2.5 Bilangan Cacah

Bilangan Cacah adalah gabungan antara bilangan asli dengan bilangan nol atau dengan kata lain, bilangan cacah adalah himpunan bilangan bulat yang tidak negatif, jadi bilangan cacah harus bertanda positif.

Himpunan bilangan cacah ditulis $0, 1, 2, 3, \dots$. Himpunan bilangan cacah memuat beberapa bilangan antara lain:

- Himpunan bilangan asli $A = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Himpunan bilangan genap $G_n = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
- Himpunan bilangan ganjil $G_j = \{1, 3, 5, \dots\}$

- Himpunan bilangan kuadrat $K = \{1, 4, 9, \dots\}$
- Himpunan bilangan prima $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$
- Himpunan bilangan komposit $T = \{4, 6, 8, \dots\}$

2.6 Bilangan Bulat

Bilangan Bulat adalah gabungan antara bilangan cacah dengan bilangan bulat negatif. Himpunan bilangan bulat ditulis

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika umumnya dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ yang berasal dari kata *Zahlen* yaitu bahasa Jerman yang artinya bilangan.

2.7 Bilangan Rasional

Bilangan Rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat serta $b \neq 0$. Bilangan bulat merupakan bilangan rasional karena setiap bilangan bulat dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$. Tetapi tidak setiap bilangan rasional adalah bilangan bulat.

Bilangan rasional dapat berupa bilangan bulat, bilangan yang dapat dinyatakan dengan pecahan atau pecahan campuran, atau dalam bentuk desimal. Contoh bilangan rasional diantaranya:

- $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$
- $1 = \frac{5}{5}$;
- $.0,3333\dots = \frac{1}{3}$;
- $0 = \frac{0}{2024}$;
- ...dan sebagainya.

2.8 Bilangan Irasional

Bilangan Irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ di mana a dan b keduanya merupakan bilangan bulat serta $b \neq 0$. Menurut sejarah penemu bilangan rasional adalah *Hippasus* dan *Metapontum* pada tahun 500 SM.

Sayangnya penemuan tersebut justru menyebabkan mereka dihukum mati karena dianggap penganut ajaran sesat.

Contoh bilangan irasional diantaranya

- $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$;
- $\log 3$;
- bilangan π ;
- bilangan e ;
- ...dan sebagainya.

2.9 Bilangan Real

Bilangan Real merupakan gabungan dari bilangan rasional dengan bilangan irasional. Himpunan bilangan real sering dinyatakan dengan R . Dalam sistem bilangan real antara bilangan-bilangan real dengan titik-titik pada garis bilangan terdapat hubungan satu-satu sehingga pada garis bilangan tidak terdapat tempat yang kosong.

Dalam sistem bilangan real, tanda " $=$ " merupakan relasi ekuivalen, karena untuk setiap a , b dan c adalah bilangan asli memenuhi:

1. Sifat reflektif.

$$a = a$$

2. Sifat simetrik.

Jika $a = b$ maka $b = a$.

3. Sifat transitif.

Jika $a = b$ dan $b = c$, maka $a = c$.

4. Hukum trikotomi.

Untuk setiap bilangan a dan b , berlaku tepat salah satu diantara relasi $a < b$, $a = b$, atau $a > b$.

2.10 Bilangan Imajiner

Bilangan Imajiner dilambangkan dengan i adalah bilangan yang memiliki sifat $i^2 = -1$. Bilangan ini biasanya merupakan bagian dari bilangan kompleks.

Definisi 2.1. Didefinisikan $i^2 = -1$ atau $i = \sqrt{-1}$.

Dalam perhitungan, $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{ab}$, karena $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ dan $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$. Sehingga

$$\begin{aligned}\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} &= i\sqrt{a} \cdot i\sqrt{b} \\ &= i^2\sqrt{ab} \\ &= (-1) \cdot \sqrt{ab} \\ &= -\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Contoh 2.2. Contoh operasi bilangan imajiner:

- $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$
- $\sqrt{-20} = \sqrt{5 \cdot (-4)} = \sqrt{5(2i)^2} = 2i\sqrt{5}$
- $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-4} = 3 \cdot 2i = 6i$
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$

2.11 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk $z = a + bi$ dengan a adalah bilangan real dan bi adalah bilangan imajiner.

Definisi 2.3. Jika $z = a + bi$ maka $\text{Re}(z) = a$ dan $\text{Im}(z) = b$.

Definisi 2.4. Jika $\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilangan kompleks, maka

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = (a, b), \ a \in \mathbb{R} \text{ dan } b \in \mathbb{R}\}$$

Definisi 2.5. Jika z_1 dan z_2 anggota $\mathbb{C}$ dengan $z_1 = (a_1, b_1)$ dan $z_2 = (a_2, b_2)$ maka

- $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ dan } b_1 = b_2$
- $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Contoh 2.6. Tentukan bilangan real dan bilangan imajiner dari $z = 3 + 2i$.

Jawab. Menurut definisi 1.3., $\operatorname{Re}(z) = 3$ dan $\operatorname{Im}(z) = 2$.

Contoh 2.7. Jika $z_1 = (3, 5)$ dan $z_2 = (3, 4)$, hitunglah $z_1 + z_2$ dan $z_1 \cdot z_2$.

Jawab.

•

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3, 5) + (3, 4) \\ &= (3 + 3, 5 + 4) \\ &= (6, 9) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3, 5) \cdot (3, 4) \\ &= (3 \cdot 3 - 5 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3) \\ &= (9 - 20, 12 + 15) \\ &= (11, 27) \end{aligned}$$

Latihan

1. Buktikan semua kebenaran dari pernyataan berikut ini:
 - a Jika a adalah bilangan genap, maka a^3 adalah bilangan genap.
 - b Jika a adalah bilangan ganjil, maka a^3 adalah bilangan ganjil.
 - c Jika n adalah bilangan bulat dan n^3 adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap.
 - d Tak ada bilangan rasional berbentuk $\sqrt[3]{2}$.
 - e Jika a habis dibagi 3, maka a^3 habis dibagi 3.
 - f Jika a tak habis dibagi 3, maka a^3 juga tak habis dibagi 3.
2. Untuk x , y , dan z adalah bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $x + y < z$, maka $x < z - y$.
3. Jika a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > 0$, $b > 0$, dan $a < b$, buktikan bahwa:
 - a $a^2 < b^2$.
 - b $ab < b^2$.
 - c $a^2 < ab$
4. Buktikan bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$ untuk sembarang $a, b \in \mathbb{Z}$.

Bilangan Bulat

3.1 Pendahuluan

Teori bilangan adalah sebuah cabang matematika yang kaya, beragam, dan berpusat pada studi sifat-sifat dan hubungan antara bilangan. Meskipun teori bilangan dapat mencakup berbagai jenis bilangan, dari bilangan rasional hingga irasional dan seterusnya, buku ini akan secara khusus membahas bilangan bulat.

Mengapa Bilangan Bulat? Bilangan bulat adalah blok bangunan dasar dalam matematika. Mereka adalah bilangan yang kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari, mulai dari menghitung objek hingga pengukuran dasar. Dalam konteks matematika yang lebih tinggi, bilangan bulat memainkan peran penting dalam banyak konsep dan teorema penting.

Sehingga mulai bab ini dan seterusnya, kita akan fokus mengeksplorasi hal-hal menarik dari bilangan bulat.

3.2 Bilangan Istimewa

Bilangan istimewa adalah kumpulan bilangan khusus yang memiliki sifat-sifat unik atau menarik dalam matematika. Beberapa bilangan istimewa yang umum ditemui antara lain:

1. Bilangan Genap

Bilangan genap adalah bilangan bulat yang dapat dibagi habis oleh 2. Contoh bilangan genap adalah 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. (*Apakah bilangan genap boleh negatif? Apakah nol termasuk genap?*)

2. Bilangan Ganjil

Bilangan ganjil adalah bilangan bulat yang tidak dapat dibagi habis oleh 2. Contoh bilangan ganjil adalah 1, 3, 5, 7, dan seterusnya. (*Apakah bilangan ganjil boleh negatif?*)

3. Bilangan Prima

Bilangan prima adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan hanya memiliki dua pembagi positif, yaitu 1 dan dirinya sendiri. Contoh bilangan prima