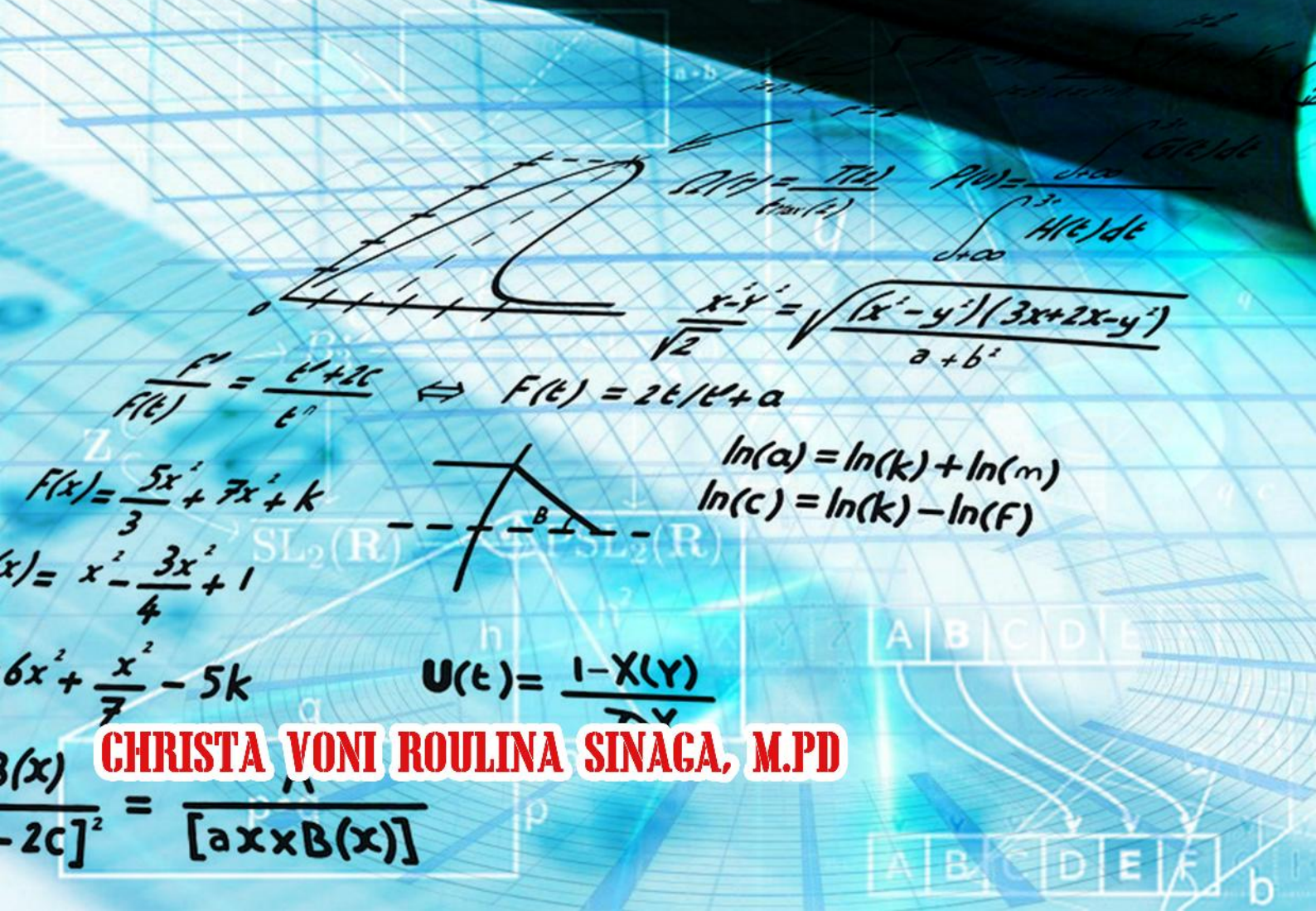




STRUKTUR ALJABAR



STRUKTUR ALJABAR

Christa Voni Roulina Sinaga, M.Pd



STRUKTUR ALJABAR

Penulis:

Christa Voni Roulina Sinaga, M.Pd

Editor:

Hedty Sitio, M.Pd

Layouter :

Tim Kreatif PRCI

Cover:

Rusli

Cetakan Pertama : Oktober 2023

Hak Cipta 2023, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2023 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2023
; 21 x 29 cm
ISBN : 978-623-448-684-1

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena kasihnya penulis mampu menyelesaikan penulisan e-book Struktur Aljabar ini. Penulis mengucapkan terimakasih juga kepada seluruh pihak yang membantu dalam penyelesaian e-book Struktur Aljabar ini.

Struktur Aljabar adalah mata kuliah yang memerlukan kemampuan berfikir logis yang berbeda dengan kemampuan berfikir yang diperlukan untuk mempelajari mata kuliah-mata kuliah lain seperti kalkulus. Liku-liku berfikir logis yang ditemui dalam mata kuliah ini memerlukan latihan yang cukup agar terbentuk cara berfikir yang diperlukan dalam pemecahan masalah yang ada dalam mata kuliah ini. Untuk membantu tercapainya tujuan itu, penulis membuat tata letak penulisan bukti dalam e-book ini sehingga nantinya akan memudahkan pemahaman mahasiswa.

Struktur Aljabar ini disusun untuk mengatasi kendala keterbatasan bahan referensi mahasiswa pendidikan matematika, khususnya untuk mata kuliah struktur aljabar. Ketersediaan buku-buku yang diperpustakaan terbatas, dan menurut pengamatan penulis buku rujukan utama dalam mata kuliah Struktur Aljabar belum pernah ada dan belum pernah diadakan.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan e-book ini, untuk itu penulis berharap saran dan kritik yang membangun untuk perbaikan. Semoga e-book struktur aljabar ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Pematangsiantar, Oktober 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB I PENGANTAR GRUP	4
A. HIMPUNAN	4
B. HIMPUNAN SEMESTA DAN HIMPUNAN KOMPLEMENT	6
C. OPERASI OPERASI PADA HIMPUNAN	7
D. HASIL KALI SILANG	10
E. RELASI	11
F. PEMETAAN	13
G. PEMETAAN IDENTITAS	14
H. PEMETAAN INVERS	14
I. BILANGAN BULAT	15
J. FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (<i>GREATEST COMMON DIVISOR</i>)	15
K. KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (<i>LEAST COMMON MULTIPLE</i>)	16
L. KEKONGRUENAN	17
 BAB II OPERASI BINER	 22
 BAB III GRUP	 28
A. GRUP	28
B. SIFAT-SIFAT GRUP	31
C. ORDER GRUP	38
 BAB IV SUBGRUP (GRUP BAGIAN)	 41
 BAB V GRUP SIKLIK (SIKLIS)	 45
 BAB VI GRUP Z_N^*	 51
 BAB VII GRUP PERMUTASI	 54
 BAB VIII “ORBITS, CYCLES, DAN ALTERNATING GRUP”	 62
A. ORBITS	62
B. CYCLES	63
C. ALTERNATING GRUP	64
 BAB IX TEOREMA LAGRANGE	 67
 BAB X HOMOMORFISMA, ISOMORFISMA DAN KOSET	 71
A. HOMOMORFISMA	71
B. ISOMORFISMA	74

C. KOSET	75
BAB XI GRUP NORMAL	78
BAB XII GRUP FAKTOR	82
BAB XIII HASIL KALI LANGSUNG GRUP	92
DAFTAR PUSTAKA	95

BAB I

PENGANTAR GRUP

Sebelum memperdalam pemahaman mengenai Struktur Aljabar, mahasiswa diperlukan pengetahuan yang memadai tentang Teori Himpunan, Pemetaan atau Fungsi, Operasi Biner, dan Sistem Bilangan.

A. HIMPUNAN

1. SEJARAH SINGKAT TEORI HIMPUNAN

Teori himpunan baru ditemukan pada abad ke-19 sekarang teori himpunan merupakan bagian terbesar dalam pendidikan matematika yang mulai di perkenalkan bahkan mulai sejak tingkat sekolah dasar.

Georg Cantor adalah seorang matematikawan Jerman asal Yahudi. Dia termasuk orang pertama yang menemukan teori Himpunan. Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845-1918) lahir di St. Petesburg, Rusia pada 3 maret 1845. Pada 1873 diusia 28, cantor telah mengumumkan dalam sebuah teorinya. Selama sepluh tahun ia menyebarkan teorinya terhadap tulisan tersebut.

2. DEFENISI HIMPUNAN

Istilah Himpunan dalam matematika berasal dari kata “set” dalam bahasa inggris.

Kata lain yang sering digunakan untuk menyatakan himpunan antara lain kumpulan, kelas, gugus, dan kelompok. Secara sederhana, arti dari himpunan adalah objek- objek (rill atau abstrak)

Defenisi:

Himpunan (set) adalah kumpulan objek objek yang berbeda.

Objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Kita katakan bahwa himpunan mengandung elemen elemen. Kata yang berbeda di dalam defenisi di atas penting untuk menekankan maksud bahwa anggota himpunan tidak boleh sama.

Sebagai contoh kumpulan dari alat music tradisional lampung, kumpulan dari buku buku, kumpulan materai, kumpulan mahasiswa di kelas, dan sebagainya. Objek yang dimasukkan dalam satu kelompok haruslah mempunyai sifat sifat tertentu yang sama. Sifat tertentu yang sama dari suatu himpunan harus didefenisikan secara tepat,

agar kita tidak salah menumpulkan objek objek yang termasuk dalam himpunan tersebut. Dengan kata lain, himpunan dalam pengertian matematika objeknya atau anggotanya harus tertentu (*well defined*), jika tidak ia bukan himpunan.

Dengan demikian, kata himpunan dalam pengertian sehari hari ada perbedaannya dengan pengertian dalam matematika. Jika kumpulan itu anggotanya tidak bisa ditentukan, maka ia bukan himpunan dalam pengertian matematika. Demikian juga dengan konsep himpunan kosong matematika, tidak ada istilah tersebut dalam pengertian sehari hari.

Contoh kumpulan yang bukan himpunan dalam pengertian matematika adalah. (1) kumpulan bilangan; (2) kumpulan lukisan indah; dan (3) kumpulan makanan lezat. Pada contoh tersebut tampak bahwa dalam suatu kumpulan ada objek. Objek tersebut dapat abstrak atau pun dapat juga konkret.

Untuk mempermudah memahami bentuk himpunan berikut adalah contoh bentuk himpunan dalam matematika:

Contoh:

Himpunan B memiliki empat anggota, yaitu 1, 2, 3, dan 4. Himpunan B terdapat ditulis $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Perhatikan bahwa himpunan ditentukan oleh anggota anggotanya, bukan pada urutan anggota anggotanya. Urutan anggota pada himpunan tidak memiliki arti apa apa kecuali pada himpunan tersebut sudah ditentukan atau merupakan syarat dari himpunan tersebut.

Himpunan biasanya digunakan dalam mengelompokkan objek yang memiliki sifat mirip. Akan tetapi berdasarkan definisi himpunan, kita mengetahui bahwa sah saja elemen elemen dalam sebuah himpunan tidak memiliki sifat sifat yang mirip atau hubungan sama antara elemen satu dengan elemen yang lainnya, asalkan berbeda. Sebagai contoh $C = \{1, 2, \text{amir}, \text{paku}, a\}$. C adalah himpunan yang terdiri dari 5 elemen yaitu 1, 2, a, amir, dan paku.

Contoh:

Contoh himpunan lainnya:

$$X = \{a, \{a, b\}, c\}$$

$$Y = \{a, \{a\}, \{\{b\}\}\}$$

$$Z = \{\{\}\}$$

Pada contoh 1.2, X merupakan himpunan yang terdiri dari 3 anggota yaitu a , $\{a,b\}$, c . Y memiliki 3 anggota yaitu a , $\{a\}$, $\{\{b\}\}$. Ini memperlihatkan bahwa suatu himpunan dapat merupakan anggota dari himpunan lain. Sedangkan Z merupakan himpunan kosong karena tidak memiliki anggota dalam himpunannya.

Suatu objek dapat menjadi anggota atau bukan anggota dari suatu himpunan. Keanggotaan himpunan dilambangkan dengan " $\in$ " yang dapat dibacakan dengan "anggota dari" atau "elemen dari", $x \in A$ menyatakan bahwa x merupakan anggota dari himpunan A . $x \notin A$ menyatakan bahwa x bukan merupakan anggota dari himpunan A .

Contoh:

Misalkan A merupakan Himpunan kabupaten/kota yang ada di provinsi lampung, Maka:

Lampung utara $\in A$

Metro $\in A$

Kotabumi $\notin A$

Muara enim $\notin A$

Kaur $\notin A$

Contoh 1.4

Bila A , dimana $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, \{1, 2\}, 3\}$, $A_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$, $A_4 = \{\{\{1, 2, 3\}\}\}$

maka:

$2 \in A_1$

$\{1, 2\} \in A_2$

$A_3 \in A_1$

$A_4 \in A_3$

$2 \notin A_2$

B. HIMPUNAN SEMESTA DAN HIMPUNAN KOMPLEMENT

1. Himpunan semesta

Himpunan semesta yaitu himpunan yang memuat semua anggota yang sedang dibicarakan. Himpunan semesta dilambangkan dengan huruf " S ".

Contoh:

$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$$B = \{5, 7, 9\}$$

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Irisan Himpunan ($\cap$)

Irisan Himpunan, dimisalkan $A \cap B$ yang artinya bahwa himpunan yang anggotanya menjadi anggota A, dan sekaligus menjadi anggota B.

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

Gabungan ($\cup$)

Gabungan, dimisalkan $A \cup B$. Yang artinya bahwa himpunan yang anggotanya menjadi anggota A atau menjadi anggota B.

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

C. OPERASI OPERASI PADA HIMPUNAN

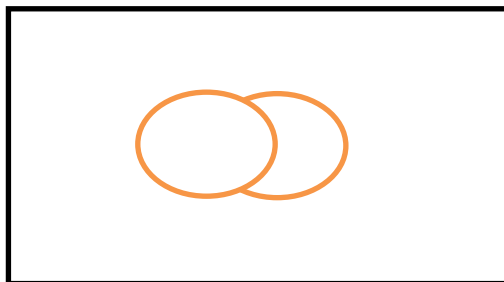
1. Irisan (*intersection*)

Defenisi:

Irisan (*intersection*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota dari himpunan A dan B

Dari defenisi diatas, dapat di notasikan $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Jika 2 himpunan saling lepas maka irisan dari kedua himpunan adalah himpunan kosong. Karena tidak ada anggota yang sama yang terdapat dari kedua himpunan tersebut. Diagram venn untuk $A \cap B$



Contoh:

- (i) Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, maka $A \cap B = \{4, 5, 6\}$
- (ii) Jika $A = \{(x, y) | x + y = 7, x, y \in R\}$, maka $A \cap B = \{(5, 2)\}$ yang merupakan titik potong dari garis $x + y = 7$ dan $x - y = 3$.

2.GABUNGAN**Defenisi:**

Gabungan atau Union dari himpunan A dan B adalah himpunan setiap anggotanya merupakan anggota dari himpunan A atau himpunan B.

Dari defenisi di atas, dapat dinotasikan $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$. Diagram Venn untuk $A \cap B$ digambarkan sebagai berikut.

Contoh:

- (i) Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ maka $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- (ii) $A \cup \emptyset = A$

3.KOMPLEMENT**Defenisi:**

Komponen dari suatu himpunan A terhadap himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen U yang bukan elemen A.

Dari defenisi diatas dapat dinotasikan $A' = \{x | x \in U \text{ dan } x \notin A\}$. Dibeberapa literature, sumber dari komplemen A adalah: A^c dan A . Dalam buku ini yang akan kita pakai adalah A' .

Diagram Venn untuk A-B digambarkan sebagai berikut.

Contoh:

- (i) Jika $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ maka $A' = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$
- (ii) Jika $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \left\{x \mid x \frac{x}{2} \in P, x < 8\right\}$

4.SELISIH (difference)**Defenisi:**

Selisih dari himpunan A dan B suatu himpunan yang anggotanya merupakan A tetapi bukan merupakan anggota dari B.

Dari definisi di atas, dapat dinotasikan $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap B'$. Selisih antara A dan B ($B - A$) dapat juga dikatakan sebagai komplement himpunan B relative terhadap A.

Diagram Venn untuk $A - B$ digambarkan sebagai berikut.

Perhatikan Gambar di atas dari diagram Venn tersebut dapat kita perhatikan bahwa "komplement dari himpunan $A (A')$ terhadap semesta U dapat juga didefinisikan sebagai $A' = (U - A)$ "

Contoh:

- (i) Jika $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ tetapi $B - A = \emptyset$
- (ii) $A = \{7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9, 10\}$ maka $A - B = \{11\}$, tetapi $B - A = \{7, 9, 10\} - \{7, 9, 11\} = \{10\}$

Dari contoh yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa selisih dua buah himpunan yang keduanya bukan himpunan kosong bersifat tidak komutatif, artinya $A - B$ tidak sama dengan $B - A$.

5. BEDA SETANGKUP (*symmetric difference*)

Defenisi:

Jika A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup dari A dan B adalah suatu himpunan yang anggotanya ada pada A atau B tetapi tidak pada keduanya.

Dari definisi di atas, dapat di notasikan $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

atau

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

Beda setangkup bukanlah penjumlahan himpunan (+). Dalam himpunan tidak ada istilah penjumlahan himpunan. Istilah beda setangkup dalam beberapa referensi lebih familiar dengan menggunakan istilah "selisih simetris" yang diambil dari bahasa Inggris dan juga referensi luar negeri yang banyak menggunakan "Symmetric Difference". Penggunaan istilah beda setangkup juga digunakan oleh beberapa penulis buku di Indonesia. Tujuan penggunaan istilah beda setangkup pada buku ini agar lebih mudah dalam membedakan antara selisih himpunan dengan selisih simetris himpunan.

Diagram Venn untuk $A \oplus B$ digambarkan sebagai berikut.

Contoh:

(i) Jika

$A = \{1,2,3, \dots, 7\}$ dan $B = \{2,4,8,10\}$ maka $A \oplus B = \{1,3,5,7,8,10\}$ dan $B \oplus A = \{1,3,5,7,8,10\}$

(ii) $\{7,9,11\} \oplus \{7,9,10\} = \{10,11\}$ dan $\{7,9,10\} \oplus \{7,9,11\} = \{10,11\}$ **Teorema:**

Dalam beda setangkup, maka akan terpenuhi hukum-hukum sebagai berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)**6. PERKALIAN KARTESIAN (*Cartesian Product*)****Defenisi:**

Jika A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian dari A dan B adalah himpunan yang anggotanya adalah pasangan berurutan (ordered pairs) yang terbentuk dari komponen pertama (dari himpunan A) dan komponen kedua (dari himpunan B)

Dari defenisi di atas, dapat dinotasikan $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$

Contoh:

(i) Jika

$A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{2,4\}$ maka $A \times B = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)\}$

(ii) Misal $D = \{x | x \in R\}$ dan $E = \{y | y \in R\}$, maka $D \times E$ adalah himpunan semua titik pada bidang datar. Artinya semua pasangan berurutan (titik-titik) pada bidang datar.

(iii)

D. HASIL KALI SILANG

Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong. Hasil kali silang. Hasil kali silang (hasil kali Cartesius) dari himpunan A dan himpunan B ditulis " $A \times B$ " didefenisikan sebagai berikut.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

Dengan perkataan lain, $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut dengan komponen pertama diambil elemen dari A dan komponen kedua diambil elemen dari B.

Contoh:

1) Misalkan $A = \{1,2,3\}$, dan $B = \{a, b\}$ maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a)$

$(3,b)\}$, sedangkan $B \times A = \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

- 2) Misalkan N = himpunan semua bilangan asli dan Z adalah himpunan semua bilangan bulat, $N \times Z = \{(A, B) \in N \text{ dan } B \in Z\}$ Periksa bahwa $(1,-5), (3,2), (7,0), (8,-7), (11,-13)$ semua anggota dari $N \times Z$. Tetapi $(0,1), (-2,4), (-3,7), (-5,-2), (-11,17)$ masing masing bukan anggota dari $N \times Z$

- 3) Apabila $A = \{1,2\}$, maka

$$A \times A = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}.$$

Selanjutnya dapat dinyatakan, jika A, B dan C adalah himpunan himpunan yang tidak kosong, maka $A \times B \times C = \{(x,y,z) \in A, y \in B \text{ dan } z \in C\}$

Sedangkan untuk himpunan himpunan $A, A_2, A_3, \dots, A$, maka $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in A \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n\}$

E. RELASI

1) Pasangan Berurut

Defenisi:

Pasangan dari dua objek a dan b yang dinyatakan dengan (a,b) disebut pasangan berurut apabila (a,b) memperhatikan urutan.

Dari defenisi pasangan berurut, dapat diartikan bahwa $(a,b) \neq (b,a)$ ditempati objek a , sedangkan bagian pertama dari (b,a) ditempati oleh b .

2) Kalimat Matematika Terbuka

Kalimat matematika dengan peubah x dan y biasanya dinyatakan dengan $P(x,y)$. Berikut didefinisikan kalimat matematika terbuka.

Defenisi:

Kalimat matematika $(P(x,y))$ disebut kalimat matematika terbuka dengan variable x dan y , apabila nilai kebenaran dari $P(x,y)$ belum dapat ditentukan.

Contoh:

Contoh contoh kalimat matematika terbuka.

- (i) $P(x,y) : "x \text{ lebih kecil dari } y"$

Pada kalimat terbuka " x lebih kecil dari y " akan bernilai benar jika kita mengganti nilai $x = 2$ dan $y = 3$ atau $P(2,3)$. Tetapi akan bernilai salah jika kita mensubstitusikan nilai $x = 4$ dan $y = 1$ atau $P(4,1)$.

- (ii) $P(a,b) : "a+b=8"$ akan bernilai benar jika kita mensubstitusikan nilai $a=5$ dan $b=3$ atau $P(5,3)$ bernilai benar. Tetapi akan bernilai salah jika kita mensubstitusikan nilai $a=2$ atau $b=3$ atau $P(2,3)$ bernilai salah
- (iii) $P(x,y) : "Kuadrat dari x ditambah dengan kuadrat dari y adalah enam belas"$ atau $"x^2 + y^2 = 25"$

Pada kalimat terbuka $"x^2 + y^2 = 25"$ akan bernilai benar jika kita mensubstitusikan nilai $x = 3$ dan $y = 4$ dan $P(3,4)$ bernilai benar. Tetapi akan bernilai salah jika kita mensubstitusikan nilai $a=5$ dan $b=2$ atau $P(5,2)$ bernilai salah

Defenisi:

Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong dan $P(x,y)$ kalimat matematika terbuka. Relasi R dari himpunan A dan B merupakan (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in A$ dari $P(a,b)$ bernilai benar, Secara matematis relasi dapat dinyatakan sebagai berikut: $R = \{(x,y) : x \in A \text{ dan } y \in B\}$ atau $R = (A,B,P(x,y))$

Berdasarkan defenisi relasi, suatu relasi R terdiri dari:

- 1) Sebuah Himpunan A
- 2) Sebuah Himpunan B
- 3) Suatu kalimat terbuka $P(x,y)$

Selanjutnya $P(a,b)$ adalah benar maka dapat ditulis $a R b$ atau dibaca "a berhubungan dengan b". Sedangkan jika $P(a,b)$ adalah tidak benar, maka dapat ditulis $a \bar{R} b$ atau dibaca "a tidak ada hubungan dengan b".

Contoh:

(i) $A = \{x | x < 5, x \text{ suatu bilangan Asli}\}$

(ii) $B = \{y | y < 4, y \text{ suatu bilangan Asli}\}$

$P(x,y) = x \text{ habis membagi } y$

Tentukan Relasi R dari himpunan A ke Himpunan B dari relasi $P(x,y) = x \text{ habis membagi } y$?

Penyelesaian:

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B yang ditunjukkan oleh relasi $P(x,y) = x \text{ habis membagi } y$ adalah $P(1,1), P(1,2), P(2,2)$ dan $(3,3)$ atau bias ditulis $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$. Perhatikan bahwa $P(2,3)$ adalah titik benar sehingga dapat ditulis $2R3$.

F. PEMETAAN

Pemetaan merupakan banyak contoh yang menunjukkan hubungan atau relasi antara satu objek dengan objek lainnya. Misalnya relasi antara nama negara dan ibukotanya seperti terlihat pada diagram panah di bawah ini.

Pada relasi tersebut terlihat bahwa setiap anggota himpunan A mempunyai pasangan tepat satu pada himpunan B.

Contoh relasi lainnya perhatikan diagram panah nilai ulangan matematika 5 orang siswa kelas VIII berikut.

Relasi tersebut memiliki kekhususan seperti halnya relasi antara himpunan A dan himpunan B, yaitu setiap anggota P memiliki pasangan tepat satu pada anggota himpunan Q. Relasi antara himpunan A dan B serta relasi antara himpunan P dan Q seperti ini dikenal dengan istilah pemetaan atau fungsi dari A ke B serta fungsi dari P ke Q.

*Jadi, **pemetaan** atau **fungsi** dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan A tepat satu anggota pada himpunan B.*

*Pada fungsi kita akan mengenal istilah **domain** atau daerah asal, **kodomain** atau daerah kawan, serta **range** atau daerah hasil.*

Himpunan $P = \{Aam, Ilham, Trisno, Lisda, Dewi\}$ disebut domain fungsi atau daerah asal. Himpunan $Q = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ disebut kodomain atau daerah kawan. Himpunan $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ yang merupakan pasangan anggota daerah asal disebut daerah hasil atau range.

Perhatikan contoh berikut.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dinyatakan dengan aturan $x + 2$, $x \in$ Jika diketahui $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$, tentukan:

1. Himpunan pasangan berurutan dalam f
2. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari f

Penyelesaian:

1. Pemetaan F dari A ke B adalah $F : x \rightarrow x + 2$

$$x = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + 2 = 4$$

$$x = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + 2 = 5$$

$$x = 5 \Rightarrow f(x) = 5 + 2 = 7$$

$$x = 7 \Rightarrow f(x) = 7 + 2 = 9$$

Himpunan pasangan berurutan $(x, f(x)) = (2,4), (3,5), (5,7), (7,9)$

2. Daerah asal $= \{2,3,5,7\}$

Daerah kawan $= \{1,2,3,\dots,12\}$

Daerah hasil $= \{4,5,7,9\}$

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan huruf kecil, misalnya f dan ditulis $f:A \rightarrow B$ (*dibaca f memetakan anggota himpunan A ke anggota himpunan B*)

Jika f adalah sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B dengan $x \in A$ dan $y \in B$ maka peta x oleh f adalah y yang dinyatakan dengan $f(x)$. Dengan demikian, diperoleh rumus fungsi sebagai berikut: $f:x \rightarrow y$ atau $f:x \rightarrow g(x)$

G. Pemetaan Identitas

Definisi H-1

S dan T masing-masing himpunan tak hampa, Pemetaan $I:S \rightarrow T$ dikatakan pemetaan identitas jika berlaku: $I(s) = s, \forall s \in S$.

Bukti: Misalkan $I:S \rightarrow T$. Maka $1_T \circ I = I$ dan $I \circ 1_S = I$, yaitu hasil kali dari sembarang fungsi dan fungsi satuan adalah fungsi itu sendiri.

Perhatikan gambar berikut ini yang menunjukkan pemetaan identitas.

H. Pemetaan Invers

Definisi I-1

S dan T masing-masing himpunan tak hampa, bangun pemetaan $\tilde{n}:S \rightarrow T$. Pemetaan $\tilde{a}:T \rightarrow S$ dikatakan pemetaan invers dari $\tilde{n}$ jika dan hanya jika:

$$(\tilde{n} \circ \tilde{a})(x) = (\tilde{a} \circ \tilde{n})(x) = I(x), \forall x \in S$$

Selanjutnya fungsi invers tersebut dinotasikan sebagai $\tilde{n}^{-1}$.

Bukti: Misalkan $\tilde{n}$ suatu fungsi dari S ke dalam T , dan misalkan $t \in T$. Maka invers dari t dinyatakan oleh $\tilde{n}^{-1}(t)$. Yang terdiri dari elemen-elemen S yang dipetakan pada t , yaitu

elemen-elemen dalam A yang memiliki t sebagai bayangannya. Secara lebih singkat, jika $\tilde{n}: S \rightarrow T$ maka $\tilde{n}^{-1}(t) = \{x, x \in A, \tilde{n}(x) = t\}$.
Perhatikan bahwa $\tilde{n}^{-1}(t)$ adalah sebuah himpunan dari S .

I. Bilangan Bulat

Konsep bilangan bulat banyak digunakan dalam permasalahan aljabar abstrak, oleh karena itu pembahasan berikut ini akan menyangkut konsep tersebut terutama terkait dengan sifat-sifat bilangan bulat. Bilangan bulat memiliki sifat terurut dengan baik (*Well Ordering Principle*) yang mengandung arti setiap himpunan bulat positif tak kosong mengandung bilangan terkecil. Disamping itu, konsep keterbagian pada bilangan bulat juga tidak kalah penting dan sangat mendasar.

Definisi 1

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian hingga $b = ka$. Jika tidak membagi habis b maka ditulis $a \nmid b$.

Contoh 1:

$7|49$ karena ada bilangan bulat $k = 7$ sedemikian hingga $7 \cdot 7 = 49$.

$4 \nmid 15$ karena tidak ada bilangan bulat k sedemikian hingga $4 \cdot k = 15$.

J. Faktor Persekutuan Terbesar (*Greatest Common Divisor*)

Secara umum, pengertian tentang faktor persekutuan dari bilangan bulat dituliskan dengan definisi berikut:

Definisi K-1

$a, b \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0$ (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat disebut faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika $d|a$ dan $d|b$.

Contoh K-1:

Faktor bulat positif dari $56 = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$

Faktor bulat positif dari $24 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Faktor-faktor persekutuan (pembagi bersama) dari 56 dan 24 adalah 1, 2, 4, 8.

Definisi K-2

$a, b \in \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat d disebut faktor persekutuan terbesar (*Greatest Common Divisor*) dari a dan b dinotasikan $\gcd(a, b)$ jika dan hanya jika memenuhi:

(a) $d|a$ dan $d|b$;

(b) jika $e|a$ dan $e|b$, maka $e \leq d$.

Definisi di atas menunjukkan bahwa jika $\gcd(a, b) = d$, maka $d \geq 1$, dan apabila ada faktor persekutuan lain, misalnya e , maka $e \leq d$.

Contoh K-2:

Tentukan $\gcd(84, 120)$!

Penyelesaian:

Faktor-faktor bulat positif dari 84 = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84)

Faktor-faktor bulat positif dari 120 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120)

Sehingga $\gcd(84, 120)$ adalah 12.

Apabila a dan b adalah dua bilangan bulat positif dengan $\gcd(a, b) = 1$, maka dikatakan bahwa a dan b saling prima atau a prima relatif terhadap b .

Teorema K-1:

(1) Jika $\gcd(a, b) = d$, maka $\gcd(a:d, b:d) = 1$.

(2) Jika $b = aq + r$ maka $\gcd(b, a) = \gcd(a, r)$.

(3) Jika $a, b \neq 0 \in \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat) maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = \gcd(a, b)$.

(4) Jika $a, b \neq 0 \in \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat), a dan b saling prima maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = 1$.

K. Kelipatan Persekutuan Terkecil (*Least Common Multiple*)

Secara umum, pengertian tentang kelipatan persekutuan terkecil (*Least Common Multiple*) dari dua bilangan bulat didefinisi sebagai berikut:

Definisi L-1

Kelipatan persekutuan terkecil dari $a, b \in \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat tak nol), adalah bilangan bulat positif yang memenuhi:

(a) $a|k$ dan $b|k$;

(b) jika $a|m$ dan $b|m$ maka $k \leq m$.

Kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b dinotasikan dengan $\text{lcm}(a, b)$.

Contoh L-1:

Tentukan $\text{lcm}(5, 7)$!

Penyelesaian:

Kelipatan 5 adalah: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, ...

Kelipatan 7 adalah: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, ...

Kelipatan persekutuan dari 5 dan 7 adalah {35, 70, ...}

Dapat dilihat bahwa $35|70$, maka kelipatan persekutuan terkecil dari 5 dan 7 atau $\text{lcm}(5, 7)$ adalah 35.

Teorema L-2

- (1) $a, b \in \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat tak nol). Jika c adalah suatu kelipatan persekutuan dari a dan b , maka $\text{lcm}(a, b)|c$.
- (2) Jika $c > 0$, maka $\text{lcm}(ac, bc) = c \text{lcm}(a, b)$.
- (3) $a, b \in \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat tak nol). Jika a dan b saling prima maka $\text{gcd}(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab$.

L. Kekongruenan**Definisi M-1**

$a, b \in \mathbb{Z}$ dan $n \in \mathbb{Z}^*$, a dan b dikatakan kongruen modulo n dinotasikan dengan $a \equiv b \pmod{n}$ jika dan hanya jika n membagi habis $a - b$ atau $a - b = kn$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Contoh M-1:

- a) $94 \equiv 13 \pmod{9}$ karena $9|(94 - 13)$ atau $9|81$.
- b) $72 \not\equiv 4 \pmod{3}$ karena $3 \nmid (72 - 4)$ atau $3 \nmid 68$.

Teorema M-1

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan a, b, c dan d bilangan bulat sebarang berlaku:

- (1) $a \equiv a \pmod{n}$.
- (2) Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $b \equiv a \pmod{n}$.
- (3) Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$ maka $a \equiv c \pmod{n}$.
- (4) Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
- (5) Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $ac \equiv bd \pmod{n}$.
- (6) Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.
- (7) Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $ac \equiv bc \pmod{n}$.