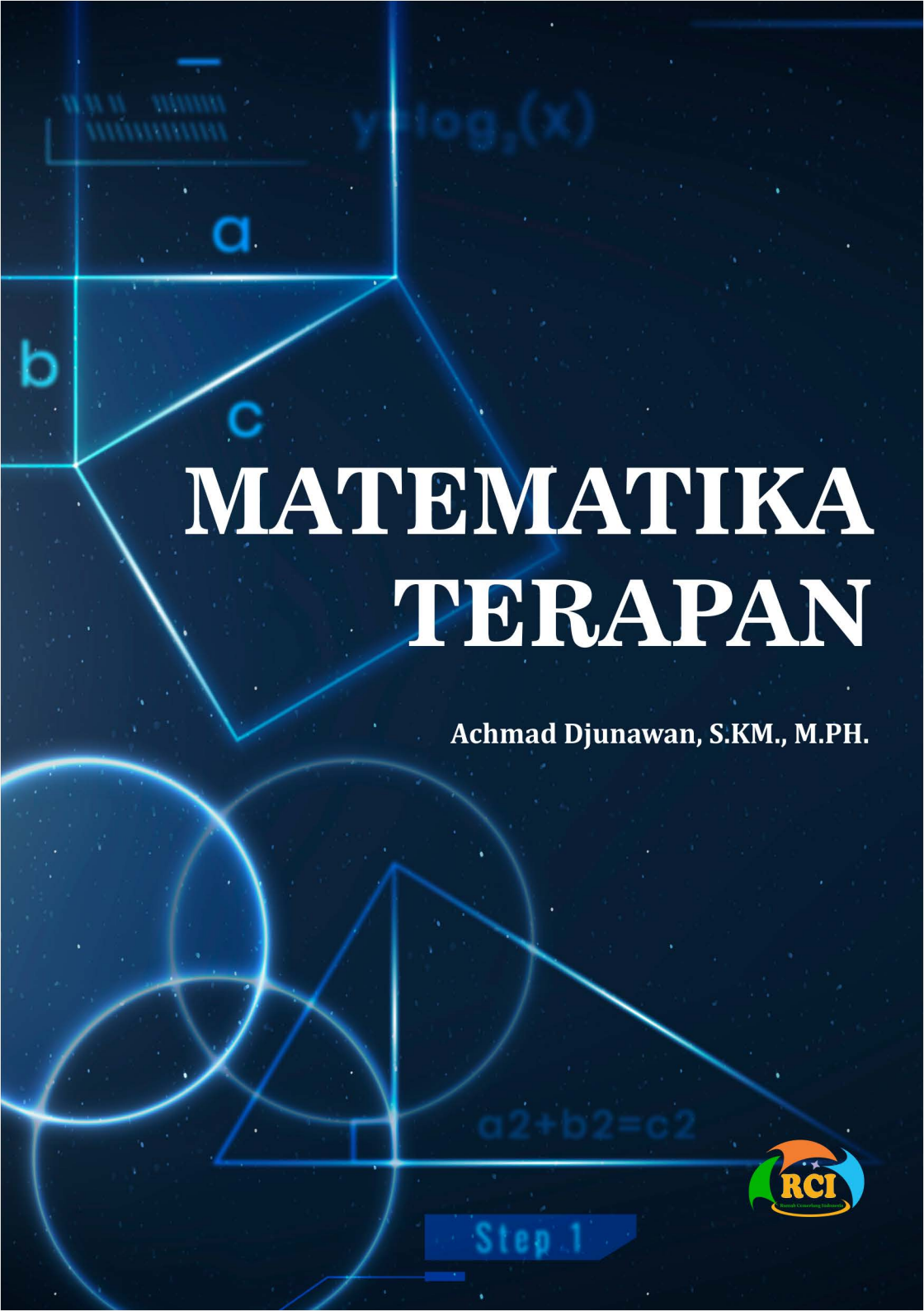




MATEMATIKA TERAPAN

Achmad Djunawan, S.KM., M.PH.

$$a^2+b^2=c^2$$

Step 1



MATEMATIKA TERAPAN

MATEMATIKA TERAPAN

Achmad Djunawan, S.KM., M.PH.



MATEMATIKA TERAPAN

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Achmad Djunawan, S.KM., M.PH.

Editor:

Erik Santoso

Cetakan Pertama: Mei 2022

Cover: Rusli

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
; 14,8 x 21 cm

ISBN: 978-623-448-082-5

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat ALLAH SWT atas anugerah dan rahmat-Nya, sehingga kami dapat menyusun bahan ajar mata kuliah Matematika Terapan yang dapat digunakan mahasiswa Program Studi S1 Administrasi Rumah Sakit Sekolah Tinggi Ilmu Kesehatan (STIKES) Yayasan Rumah Sakit Dr. Soetomo Surabaya.

Buku ajar Matematika Terapan ini terdiri dari 6 bab Materi Perkuliahan, meliputi: (1) Barisan dan Deret Serta Implementasinya; (2) Turunan dan Aplikasi Turunan; (3) Integral dan Aplikasi Integral; (4) Regresi dan Analisis Trend; (5) Himpunan, Permutasi, dan Kombinasi; (6) Logika dan Logical Fallacy.

Tujuan disusunnya buku ajar ini, kami berharap mahasiswa lebih memahami dan lebih termotivasi untuk belajar Mata Kuliah Matematika Terapan Prodi S1 Administrasi Rumah Sakit. Kami menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran untuk penyempurnaan buku ini akan kami terima dengan penuh rasa terima kasih.

Semoga buku ajar ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa, dosen dan siapa saja yang menggunakannya untuk kemajuan pendidikan di Sekolah Tinggi Ilmu Kesehatan (STIKES) Yayasan Rumah Sakit Dr. Soetomo Surabaya khususnya dan kemajuan pendidikan di Indonesia pada umumnya.

Surabaya, 15 Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR TABEL.....	iv
DAFTAR GAMBAR.....	v
BAB I BARISAN DAN DERET SERTA IMPLEMENTASINYA	1
A. Barisan	1
B. Deret.....	10
C. Implementasi.....	14
D. Rangkuman.....	29
E. Latihan Soal.....	31
 BAB II TURUNAN DAN APLIKASI TURUNAN.....	33
A. Turunan	33
B. Aplikasi Turunan.....	45
C. Rangkuman.....	54
D. Latihan Soal.....	56
 BAB III INTEGRAL DAN APLIKASI INTEGRAL	57
A. Integral.....	57
B. Aplikasi Integral	67
C. Rangkuman.....	72
D. Latihan Soal.....	73
 BAB IV REGRESI DAN ANALISIS TREND	75
A. Regresi.....	75
B. Analisis Trend	76
C. Rangkuman.....	105
D. Latihan Soal.....	107

BAB V HIMPUNAN, PERMUTASI DAN KOMBINASI	109
A. Himpunan	109
B. Permutasi.....	125
C. Kombinasi.....	131
D. Rangkuman	132
E. Latihan Soal.....	135
 BAB VI LOGIKA DAN LOGICAL FALLACY	 137
A. Logika	137
B. Logical Fallacy.....	154
C. Rangkuman	169
D. Latihan Soal.....	170
 BAB VII KESIMPULAN	 173
DAFTAR PUSTAKA.....	177
BIOGRAFI PENULIS	179

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Nilai Masa Datang dari Anuitas Sebesar Rp6.000.000 dengan Tingkat Bunga Tunggal 15% per Tahun selama 5 Periode/Tahun.....	21
Tabel 4.1 Contoh Tabel Data Penjualan	82
Tabel 5.1 Perbedaan Permutasi dengan Kombinasi	132
Tabel 6.1 Tabel Kebenaran Disjungsi, Konjungsi, Implikasi dan Bimplikasi.....	141

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Nilai Masa Datang dari Anuitas Setelah 5	20
Gambar 1.2 Nilai Masa Datang dari Anuitas Sebesar Rp6.000.000 dengan Tingkat Bunga Majemuk 15% per Tahun selama 5 Periode/Tahun.....	21
Gambar 1.3 Nilai Masa Datang dari Anuitas Setelah 12 Periode yang Dibayarkan Secara Majemuk.....	22
Gambar 1.4 Nilai Masa Datang dari anuitas sebesar Rp5.000.000 yang Dibunga Majemuk secara Bulanan Selama Satu Tahun	23
Gambar 1.5 Nilai Sekarang dari Anuitas Setelah 4 Tahun Periode yang Dibayarkan Secara Majemuk.....	25
Gambar 1.6 Nilai Setiap Awal Tahun, Akhir Tahun, dan Pendapatan Bunga	26
Gambar 1.7 Cicilan Pinjaman Setiap Periode atas Pinjaman Rp80.000.000 dengan Tingkat Bunga 15% selama 24 Periode	27
Gambar 2.1 Kurva Fungsi Cekung ke bawah	41
Gambar 2.2 Kurva Fungsi Cekung ke atas.....	41
Gambar 2.3 Kurva Fungsi Titik Belok.....	42
Gambar 3.1 Contoh Surplus Produsen dan Konsumen	70
Gambar 3.2 Surplus Produsen dan Konsumen	71
Gambar 4.1 Grafik Data Kunjungan Pasien	78
Gambar 4.2 Grafik Analisis Trend	79
Gambar 4.3 Grafik Analisis Trend	79
Gambar 4.4 Grafik Analisis Trend	80
Gambar 4.5 Diagram Analisis Trend	80
Gambar 4.6 Grafik Trend Naik.....	81
Gambar 4.7 Diagram Analisis Trend	81
Gambar 4.8 Trend dengan Metode Free Hand Method	83
Gambar 4.9 Grafik Rata-Rata Bergerak.....	88

Gambar 4.10 Grafik Trend Naik	89
Gambar 4.11 Grafik Trend Turun.....	89
Gambar 4.12 Diagram Scatter Plot.....	96
Gambar 4.13 Bentuk Trend Kurva Kuadratik.....	96
Gambar 4.14 Contoh Kasus pada Pandemi Covid-19 di Surabaya	101
Gambar 4.15 Grafik Trend Eksponensial	102
Gambar 4.16 Grafik Trend Eksponensial	102
Gambar 4.17 Trend Eksponensial.....	103
Gambar 5.1 Contoh Diagram Venn.....	114
Gambar 5.2 Himpunan Semesta S	116
Gambar 5.3 Himpunan A dengan Semesta S	116
Gambar 5.4 $A \cap B$	117
Gambar 5.5 $A \cap B = \emptyset$	118
Gambar 5.6 $A \cap B \neq \emptyset$	119
Gambar 5.7 $A \subset B$	120
Gambar 5.8 Daerah yang diarsir menyatakan $A \subset B$	120
Gambar 5.9 Karena $A \cap B = \emptyset$ maka tidak ada daerah yang diarsir	121
Gambar 5.10 $A \cup B$	121
Gambar 5.11 Daerah yang diarsir menyatakan $A \cup B$	122
Gambar 5.12 Daerah yang diarsir menyatakan $A \cup B$	122
Gambar 5.13 $A \cap S$	123
Gambar 5.14 $A - B$	123
Gambar 5.15 Daerah yang diarsir menyatakan $A - B$	124

BAB I

BARISAN DAN DERET SERTA IMPLEMENTASINYA

Capaian Akhir :

Mahasiswa mampu memahami konsep barisan dan deret serta implementasinya

Indikator :

Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian, menghitung serta mengimplementasikan barisan dan deret

Pengantar :

Salah satu pelajaran dalam matematika adalah barisan dan deret. Barisan dan deret sudah tidak asing lagi ditelinga mahasiswa. Hal tersebut disebabkan karena pelajaran ini sudah pernah didapatkan dibangku SMA. Akan tetapi, tidak akan menjadi suatu kesalahan jika mengulangi pelajaran yang telah lalu. Selain itu, kita juga belajar untuk mengimplementasikan barisan dan deret.

A. Barisan

1. Pengertian Barisan

Baris adalah daftar urutan bilangan dari kiri ke kanan yang mempunyai pola tertentu. Setiap bilangan barisan adalah suku dalam barisan.

Contoh:

- a. 1, 2, 3, 4, 5, dst
- b. 3, 5, 7, 9,dst
- c. 14, 11, 8, 5, 2, dst

- d. 2, -2, 2, -2, 2, -2,.....dst
- e. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ dst
- f. 8, 4, 3, 1, -2, -5,dst
- g. 1, 5, 3, 7, 9,.....dst

Tiap-tiap bilangan pada barisan disebut suku (U) dalam barisan (Karso, 2010):

- Suku pertama dilambangkan dengan U_1
- Suku kedua dilambangkan dengan U_2
- Suku ketiga dilambangkan dengan U_3
- Suku ke- n dilambangkan dengan U_n

2. Macam-Macam Barisan

Di dalam matematika, barisan ada 2 macam, yaitu:

a. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan dengan selisih antara dua suku yang berurutan selalu tetap. Selisih tersebut dinamakan “ beda “ dilambangkan dengan “ b “. contoh:

- a. 3,6,9,12,15....
- b. 1, 3, 5, 7,
- c. 2, 6, 10, 14,.....
- d. 100, 90, 80, 70,.....

Jika kita perhatikan contoh a), selisih setiap suku berurutan selalu sama /tetap yaitu : $b = 3$, sedangkan pada contoh b) suku yang pertamanya $U_1 = 1$, suku yang kedua U_2 diperoleh dengan menambahkan 2 kepada U_1 , suku yang ketiga U_3 diperoleh dengan menambahkan 2 kepada U_2 , demikian seterusnya. Jadi selisih dari setiap suku yang berurutan dari barisan ini adalah tetap, yaitu sebesar 2 (Karso, 2010).

Sekarang kita akan mencari rumus umum suku ke-n dari barisan aritmatika, yakni sebagai berikut:

Jika suatu suku pertama barisan aritmatika U_1 dinamakan a , maka didapat

$$U_1 = a$$

$$U_2 - U_1 = b \quad \Longleftrightarrow \quad U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \quad \Longleftrightarrow \quad U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$$

$$U_4 - U_3 = b \quad \Longleftrightarrow \quad U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$$

Dan seterusnya, sehingga didapat barisan aritmatika dalam bentuk:

$$a, (a+b), (a+2b), (a+3b), \dots, (a+(n-1)b)$$

Suku ke $n = U_n$

$$\mathbf{U_n = a + (n-1)b}$$

Keterangan:

a = U_1 = suku pertama

b = beda

n = banyaknya suku

U_n = suku ke- n

$$a, (a+b), (a+2b), \dots, (a+(n-1)b)$$

Suku ke 1, suku ke 2, suku ke 3, ..., suku ke n

$$(a+0.b), (a+1.b), (a+2.b), \dots, (a+(n-1)b)$$

Tanpa kita mengetahui satu persatu objek tiap suku, kita dapat mengetahui langsung suku tengahnya dengan syarat harus diketahui suku awal dan suku akhir. Rumus suku tengah barisan aritmatika ini yaitu:

$$\mathbf{U_t = \frac{1}{2} (a + U_n)}$$

Dimana:

Ut = suku tengah

a = suku pertama atau suku awal

U_n = suku terakhir

Contoh:

Diketahui barisan aritmatika 5,8,11, ... ,125,128,131. Maka suku tengahnya adalah.....

Jawab:

Suku pertama a = 5

Suku ke-n U_n = 131

$$\begin{aligned}\text{Suku tengah } U_t &= \frac{1}{2} (a + U_n) \\ &= \frac{1}{2} (5 + 131) \\ &= \frac{1}{2} (136) \\ &= 68\end{aligned}$$

Jadi, suku tengah dari barisan aritmatika 5, 8, 11, ..., 125, 128, 131 adalah 68.

Misalkan diantara dua bilangan x dan y disisipkan sebanyak k bilangan sedemikian sehingga terbentuk barisan aritmatika dengan beda b. Suku-suku yang terbentuk adalah sebagai berikut :

x, (x + b), (x + 2b), (x + 3b), (x + 4b), y

x, (x + b), (x + 2b), (x + 3b),, (x + kb), y

Perhatikan bahwa setiap suku barisan aritmatika (kecuali suku pertama) merupakan hasil penjumlahan suku sebelumnya dengan beda. Berdasarkan hal ini, dua suku terakhir dapat kita nyatakan dalam hubungan :

$$\begin{aligned}
 (x + kb) + b &= y \\
 x + kb + b &= y \\
 x + (kb + b) &= y \\
 x + (k + 1)b &= y \\
 (k + 1)b &= (y - x) \\
 b &= \frac{(y - x)}{(k + 1)}
 \end{aligned}$$

Jika diantara dua bilangan x dan y disisipkan sebanyak k bilangan, sedemikian sehingga bilangan-bilangan tersebut membentuk barisan aritmatika, maka beda barisan aritmatika yang terbentuk dirumuskan

$$b = \frac{(y - x)}{(k + 1)}$$

dengan banyaknya suku setelah disisipkan adalah $n = k + 2$

Contoh soal:

Antara bilangan 20 dan 116 disisipkan 11 bilangan sehingga bersama kedua bilangan semula terjadi deret hitung. Maka jumlah deret hitung yang terjadi adalah....

Jawab:

Antara bilangan 20 dan 116 disisipkan 11 bilangan sehingga bersama kedua bilangan semula terjadi deret hitung.

Diketahui :

$$x = 20$$

$$y = 116$$

$$k = 11$$

$$b = \frac{(y - x)}{(k + 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= (116 - 20) / (11 + 1) \\
 &= 96 / 12 \\
 &= 8 \\
 S_n &= \frac{n}{2} (a + U_n) \\
 &= \frac{13}{2} (20 + 116) \\
 &= 6,5 (136) \\
 &= 884
 \end{aligned}$$

b. Barisan Geometri

Barisan geometri merupakan barisan yang memenuhi sifat hasil bagi sebuah suku dengan suku sebelumnya yang berurutan.

Contoh

1, 3, 9, 27,dst

Misalnya barisan geometri tersebut adalah a, b, dan c, maka $\frac{c}{b}$

$$= \frac{b}{a} = \text{konstan.}$$

Konstan ini disebut rasio barisan geometri. Biasa dilambangkan dengan “r”. Sehingga didapatkan rumus untuk mencari rasio adalah

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Keterangan:

r = Rasio

Un = Suku ke n

Contoh :

- a. 3, 6, 12,..... $\left(r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2 \right)$
- b. 1000, 100, 10,.... $\left(r = \frac{100}{1000} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \right)$
- c. 1, 3, 9,.... $\left(r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2 \right)$
- d. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ $\left(r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \right)$

Jika suku pertama dari barisan geometri $U_1 = a$ dan rasio = r , maka barisan geometri tersebut adalah

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1} \text{ dan } r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \text{ dst}$$

Rumus suku ke- n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$

Keterangan

U_n = Suku ke n

A = Suku pertama

r = Rasio

Contoh 1 :

Diketahui barisan geometri 3, 6, 12,..... Tentukan suku ke-10!

Jawab :

$$a = 3$$

$$r = \frac{6}{3} = 2$$

$$n = 10$$

$$\text{Maka } U_n = ar^{n-1}$$

$$= 3 \times (2)^{10-1}$$

$$= 3 \times 512$$

$$= 1.536$$

Jadi, suku ke-10 dari barisan geometri tersebut adalah 1.536

Contoh 2 :

Suatu barisan geometri diketahui $U_3 = 144$ dan $U_7 = 9$.
Tentukan U_6 !

Jawab :

$$\frac{U_7}{U_3} = \frac{ar^6}{ar^2} = \frac{9}{144}$$

$$r^4 = \frac{1}{6} \quad \text{sehingga} \quad r = \frac{1}{4}$$

$$U_3 = ar^2 = 144$$

$$\Rightarrow a \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 144$$

$$\Rightarrow a \left(\frac{1}{2}\right) = 144$$

$$\Rightarrow a = 144 \times 4 = 576$$

$$\text{Sehingga } U_6 = ar^5 = 576 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{576}{32} = 8$$

Barisan geometri mempunyai suku tengah dengan syarat banyak suku harus ganjil. Suku tengah disimbolkan U_t yang dapat dicari nilainya dari barisan yang banyak sukunya berhingga. Rumus suku tengah

$$U_t = \sqrt{U_{awal} \cdot U_{akhir}}$$

Contoh :

Tentukan nilai suku tengah dari barisan geometri berikut !

1) 1, 2, 4, 8, 16

2) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81$

Jawab :

$$1) U_{\text{awal}} = 1$$

$$U_{\text{akhir}} = 16$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } U_t &= \sqrt{U_{\text{awal}} \cdot U_{\text{akhir}}} \\ &= \sqrt{1 \times 16} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Maka suku tengah dari 1, 2, 4, 8, 16 adalah 4

$$2) U_{\text{awal}} = \frac{1}{9}$$

$$U_{\text{akhir}} = 81$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } U_t &= \sqrt{U_{\text{awal}} \cdot U_{\text{akhir}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} \times 81} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Maka suku tengah dari $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81$ adalah 3.

Misalkan diantara dua bilangan real p dan q (dengan p tidak sama dengan q) dapat disisipkan s bilangan (s bilangan asli). Bilangan semula dengan bilangan yang disisipkan tersebut akan membentuk suatu barisan geometri baru tersebut adalah

$$r = \sqrt[s+1]{\frac{q}{p}}$$

Keterangan :

r = Rasio barisan geometri yang baru

s = banyaknya suku sisipan

q dan p = dua suku berurutan pada barisan geometri sebelumnya

Contoh :

Suatu barisan suku pertama dan suku keduanya yaitu 4 dan 324. Jika diantara kedua suku tersebut disisipkan 3 bilangan sehingga terbentuk barisan geometri yang baru, kemungkinan rasio barisan geometri yang baru adalah...

Jawab :

$$r = \sqrt[s+1]{\frac{q}{p}}$$

$$r = \sqrt[s+1]{\frac{324}{4}}$$

$$r = \sqrt[4]{81}$$

$$r = \pm 3$$

Jadi, kemungkinan rasio barisan geometri yang baru adalah -3 atau 3.

B. Deret

1. Pengertian Deret

Menurut Dumairy (2010) menjelaskan bahwa deret ialah rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu. Sedangkan menurut Bumulo dan Mursinto (2012) menjelaskan bahwa deret merupakan jumlah semua suku dari suatu barisan yang dinyatakan dengan notasi S_n atau sering dinyatakan dengan notasi sigma. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk sebuah deret dinamakan suku.

Deret adalah penjumlahan suku-suku dari suatu barisan. Jika suatu barisan = $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ adalah deret.

Contoh :

- $1+2+3+4+5+ \dots + U_n$
- $2+4+6+8+10+ \dots + U_n$
- $3+5+7+9+11+ \dots + U_n$

2. Macam-Macam Deret

Dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya, deret dapat dibedakan menjadi 2 macam, yaitu antara lain:

a. Deret Aritmatika

Deret aritmetika ialah jumlah suku-suku hasil barisan aritmetika.

Contoh :

$$5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + \dots + U_n$$

$$a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + \dots + (a+(n-1)b)$$

Rumus:

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n) \text{ atau } S_n = n \frac{1}{2} (a + U_n)$$

Keterangan

S_n = jumlah n suku pertama

Contoh soal:

Diketahui deret aritmatika sebagai berikut = $10 + 13 + 16 + U_{10}$

Tentukan :

- Suku ke 10
- Jumlah sepuluh suku pertama (U_{10})

Jawab:

a. Suku ke 10

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_{10} = 10 + (10 - 1)3$$

$$= 10 + 27$$

$$= 37$$

b. Jumlah sepuluh suku pertama

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (10 + 37)$$

$$= 5 \times 47$$

$$= 235$$

2. Deret Geometri

Seperti halnya deret aritmatika, bahwa suatu deret geometri adalah jumlah suku-suku pada barisan geometri. Jika barisan geometri dinyatakan dalam bentuk baku, yaitu

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$$

Maka deret geometrinya adalah

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

Adapun rumus yang digunakan untuk mencari S_n adalah

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad (\text{rumus ini bisa digunakan bila } r \text{ lebih besar dari } 1 \text{ atau } r > 1)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (\text{rumus ini bisa digunakan bila } r \text{ lebih kecil dari } 1 \text{ atau } r < 1)$$

Keterangan :

S_n = Jumlah barisan ke- n

a = Suku pertama

r = Rasio

Contoh :

Tentukan jumlah dari deret geometri berikut ini :

$$2 + 4 + 8 + 16 + \dots \quad (8 \text{ suku})$$

$$12 + 6 + 3 + 1,5 + \dots \quad (6 \text{ suku})$$

Jawab :

$$2 + 4 + 8 + 16 + \dots \quad (8 \text{ suku})$$

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

Karena r lebih besar dari 1 (> 1), maka rumus yang digunakan adalah

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{510}{1} \\ &= 510 \end{aligned}$$

$$12 + 6 + 3 + 1,5 + \dots \quad (6 \text{ suku})$$

$$r = \frac{6}{12} = 0,5$$

Karena r lebih kecil dari 1 (< 1), maka rumus yang digunakan adalah

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ &= \frac{12(1 - 0,5^6)}{1 - 0,5} \\ &= 23,625 \end{aligned}$$

C. Implementasi

1. Bunga Tunggal

Perhitungan bunga setiap periode selalu dihitung berdasarkan besarnya modal yang tetap. Contohnya saat menabung di bank, kita akan mendapatkan bunga yang tetap tiap-tiap periode. Modal adalah jumlah dari yang dibungakan. Modal awal merupakan modal yang dikeluarkan pada awal waktu usaha dan sebelum dibungakan. Modal akhir adalah hasil dari modal yang dibungakan. Sedangkan suku bunga dinyatakan dalam bentuk persentase tiap satuan waktu.

$M_n = M_o + (M_o \cdot b) + \dots + (M_o \cdot b)$ Sebanyak n waktu

$M_n = M_o + (M_o \cdot b \cdot n)$

$M_n = M_o (1 + (b \cdot n))$

$M_n = M_o (1 + b \cdot n)$

M_n = uang yang diperoleh setelah n waktu

M_o = modal

b = bunga

n = banyaknya waktu

Contoh

Jono menandatangani uangnya sebesar 10 juta selama 5 tahun dengan bunga 1% per tahun. Bunga yang diperoleh tidak diakumulasikan sebagai modal deposito tahun berikutnya, tapi ke rekening tabungan. Berapa total uang jono selama 5 tahun?

Jawab :

$M_n = M_o + (M_o \cdot b \cdot n)$

$M_n = 10.000.000 (1 + (0,05 \cdot 5))$

$M_n = 10.500.000$

M_n = uang yang diperoleh setelah n waktu

$M_o = 10.000.000$

$$b = 0,01$$

$$n = 5$$

2. Bunga Majemuk

Bunga yang timbul pada setiap akhir jangka waktu tertentu (bulan/tahun) dan memengaruhi besarnya modal dan bunga pada setiap jangka waktunya.

$$M_n = M_o \cdot (1 + b)^n$$

M_n = uang yang diperoleh setelah n waktu

M_o = modal

b = bunga

n = banyaknya waktu

Contoh

Jono mendepositkan uangnya sebesar 10 juta selama 5 tahun dengan bunga 1% per tahun. Bunga yang diperoleh diakumulasikan sebagai modal deposito tahun berikutnya. Berapa total uang jono selama 5 tahun?

Jawab :

$$M_n = M_o \cdot (1 + b)^n$$

$$M_n = 10.000.000 \cdot (1 + 0,01)^5$$

$$M_n = 10.510.101$$

$$M_o = 10.000.000$$

$$b = 0,01$$

$$n = 5$$

3. Diskonto

Bunga dihitung pada awal/permulaan periode (bunga dibayar dimuka) sehingga pada akhir periode jumlah yang dibayar atau suatu pinjaman adalah jumlah pokok pinjaman tersebut.

4. Anuitas

Anuitas adalah suatu rangkaian pembayaran dan penerimaan yang dibuat secara periodik dan dalam jumlah yang tetap atau sama selama waktu tertentu. Jika suatu pinjaman akan dikembalikan secara anuitas, maka ada tiga komponen yang menjadi dasar perhitungan, yaitu:

- Besar pinjaman
- Besar bunga
- Jangka waktu dan jumlah periode pembayaran

Anuitas yang diberikan secara tetap pada setiap akhir periode mempunyai dua fungsi yaitu membayar bunga atas hutang dan mengangsur hutang itu sendiri. Sehingga konsepnya :

$$\text{Anuitas} = \text{bunga atas hutang} + \text{angsuran hutang}$$

Jika utang sebesar M_0 mendapat bunga sebesar b per bulan dan anuitas sebesar A , maka dapat ditentukan:

- a. Besar bunga pada akhir periode ke- n

$$B_n = (1 + b)^{n-1}(b.M - A) + A$$

- b. Besar angsuran pada akhir periode ke- n

$$A_n = (1 + b)^{n-1}(A - b.M)$$

- c. Sisa hutang pada akhir periode ke- n

$$M_n = (1 + b)^n \left(M - \frac{A}{b} \right) + \frac{A}{b}$$

Contoh 1 :

Sebuah pinjaman sebesar 20 juta akan dilunasi secara anuitas tahunan sebesar 4 juta. Jika suku bunga 5% per tahun, besar angsuran, bunga dan sisa hutang tahun ketiga adalah.....

Jawab :

a. Angsuran

$$A_n = (1 + b)^{n-1}(A - b \cdot M)$$

$$A_n = (1 + 0,05)^{3-1}(4.000.000 - 0,05 \times 20.000.000)$$

$$A_n = (1,05)^2(4.000.000 - 1.000.000)$$

$$A_n = (1,1025)(3.000.000)$$

$$A_n = 3.307.500,00$$

b. Bunga

$$B_n = (1 + b)^{n-1}(b \cdot M - A) + A$$

$$B_n = (1 + 0,05)^{3-1}(0,05 \times 20.000.000 - 4.000.000) + 4.000.000$$

$$B_n = (1,05)^2(-3.000.000) + 4.000.000$$

$$B_n = -3.307.500 + 4.000.000$$

$$B_n = 692.500,00$$

c. Sisa hutang

$$M_n = (1 + b)^n \left(M - \frac{A}{b} \right) + \frac{A}{b}$$

$$M_n = (1 + 0,05)^3 \left(20.000.000 - \frac{4.000.000}{0,05} \right) + \frac{4.000.000}{0,05}$$

$$M_n = (1,157625)(-60.000.000) + 80.000.000$$

$$M_n = 10.542.500,00$$

Besar anuitas untuk membayar hutang sebesar M_0 dengan bunga sebesar b perbulan selama n bulan adalah :

$$A = \frac{b(M_0)(1 + b)^n}{(1 + b)^{n-1}}$$

Contoh 2 :

Sebuah pinjaman sebesar 850 juta yang harus dilunasi dengan 6 anuitas jika dasar bunga 4% per bulan dan pembayaran pertama dilakukan setelah sebulan. Sisa hutang pada akhir bulan kelima adalah

Jawab :

$$A = \frac{b(Mo)(1+b)^n}{(1+b)^{n-1}}$$

$$A = \frac{0,04(850.000.000)(1+0,04)^6}{(1+0,04)^{6-1}}$$

$$A = \frac{0,04(850.000.000)(1,04)^6}{(1,04)^{6-1}}$$

$$A = \frac{43.020.846,63}{0,2265319}$$

$$A = 1627.147.628,43$$

Sisa hutang pada akhir periode ke-5 adalah

$$M_n = (1+b)^n \left(M - \frac{A}{b} \right) + \frac{A}{b}$$

$$M_n = (1+0,04)^5 \left(850.000.000 - \frac{1627.147.628,43}{0,04} \right) + \frac{1627.147.628,43}{0,04}$$

$$M_n = (1,04)^5 \left(850.000.000 - \frac{1627.147.628,43}{0,04} \right) + \frac{1627.147.628,43}{0,04}$$

$$M_n = 155.911.109,00$$

5. Nilai Masa Datang Anuitas (Future Value)

Future value anuitas merupakan jumlah total anuitas pada masa yang akan datang atau biasa juga disebut nilai jatuh tempo anuitas. Terdapat sedikit perbedaan dalam mencari anuitas biasa dan anuitas jatuh tempo. Berikut adalah rumus mencari future value dari anuitas biasa:

$$S_n = P \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Dimana:

S_n = Jumlah nilai masa datang dari anuitas setelah n periode

P = Jumlah dari anuitas

i = tingkat bunga

n = jumlah periode pembayaran

sedangkan untuk mencari future value dari anuitas jatuh tempo menggunakan rumus sebagai berikut:

$$S_n = P \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)$$

Dimana:

S_n = Jumlah nilai masa datang dari anuitas setelah n periode

P = Jumlah dari anuitas

i = tingkat bunga

n = jumlah periode pembayaran

Contoh 1:

Susana ingin menabung uangnya sebanyak Rp6.000.000 setiap akhir tahun di suatu bank komersil, dimana pembayaran bunga 15% per tahun secara majemuk. Transaksi tabungan untuk tahun pertama di bank tersebut