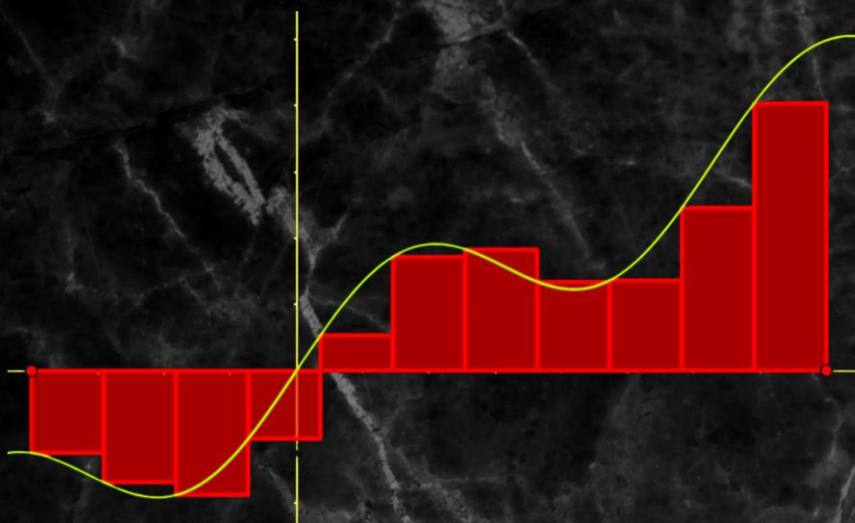


ANALISIS REAL



DR. I MADE SUGIARTA, M.SI.

PROF. DR. I PUTU WISNA ARIAWAN, M.SI.

I MADE SUARSANA, S.PD. M.SI.

I GUSTI NYOMAN YUDI HARTAWAN, S.SI., M.SC.

I PUTU PASEK SURYAWAN, S.PD., M.PD.



ANALISIS REAL

Dr. I Made Sugiarta, M.Si.

Prof. Dr. I Putu Wisna Ariawan, M.Si.

I Made Suarsana, S.Pd. M.Si.

I Gusti Nyoman Yudi Hartawan, S.Si., M.Sc.

I Putu Pasek Suryawan, S.Pd., M.Pd.





ANALISIS REAL

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Dr. I Made Sugiarta, M.Si.
Prof. Dr. I Putu Wisna Ariawan, M.Si.
I Made Suarsana, S.Pd. M.Si.
I Gusti Nyoman Yudi Hartawan, S.Si., M.Sc.
I Putu Pasek Suryawan, S.Pd., M.Pd.

Editor:

Dr. I Made Sugiarta, M.Si.

Cetakan Pertama : Januari 2024

Cover:

I Gede Reyxza Wiweka

Tata Letak : Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Rafflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 18,2 x 25,7cm
ISBN :

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Isi diluar tanggung jawab Penerbit
Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Mata kuliah Analisis Real adalah satu mata kuliah inti yang wajib diikuti oleh mahasiswa program studi Matematika atau Pendidikan Matematika. Mata kuliah ini dirancang untuk membekali mahasiswa dengan pemahaman mendalam tentang sistem bilangan real, ruang metrik, topologi ruang kartesius, barisan dan deret bilangan real, barisan dan deret fungsi, turunan, serta integral. Penguasaan terhadap topik-topik tersebut tidak hanya menjadi landasan yang kokoh dalam memahami matematika tingkat lanjut, khususnya dalam cabang analisis, tetapi juga mendukung penerapan matematika dalam berbagai bidang ilmu. Oleh karena itu, penguasaan mata kuliah Analisis Real menjadi hal yang sangat penting, terutama bagi mahasiswa yang berencana memperdalam matematika lanjutan atau memanfaatkannya dalam karier profesional, termasuk dalam profesi pendidik matematika.

Penyusunan buku ini diupayakan singkat, padat dan jelas. Di samping itu, dalam pemaparan konsep matematikanya selalu disertai contoh-contoh untuk memudahkan mahasiswa memahami uraian materi yang diberikan. Buku ini disusun dalam tujuh bab. Pada setiap akhir bab dilengkapi dengan latihan soal. Soal latihan yang diberikan telah disesuaikan dengan indikator tujuan pembelajaran. Dengan mengerjakan latihan soal, diharapkan pemahaman materinya semakin kuat.

Kami menyadari buku ajar ini masih jauh dari sempurna. Oleh karenanya, masukan konstruktif sangat diharapkan untuk perbaikan buku ini di masa mendatang. Sebagai akhir kata, kami berharap semoga buku ini dapat memberikan kontribusi positif dalam pembelajaran Analisis Real di perguruan tinggi.

Singaraja, Desember 2024
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
BAB I SISTEM BILANGAN REAL	1
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	1
B. URAIAN MATERI	1
1.1. Sifat Field Bilangan Real	2
1.2. Sifat Terurut Pada R.....	4
1.3. Harga Mutlak.....	5
1.4. Sifat Kelengkapan Pada R.....	7
C. LATIHAN SOAL.....	11
BAB II RUANG METRIK	13
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	13
B. URAIAN MATERI	13
2. 1. Pengertian Ruang Metriks Secara Umum ...	13
2. 2. Ruang Pseudometrik	16
2. 3. Bola di Ruang Metrik.....	17
2. 4. Ruang Metrik Kompak.....	18
C. LATIHAN SOAL.....	19
BAB III TOPOLOGI RUANG KARTESIS	21
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	21
B. URAIAN MATERI	21
3.1. Kedudukan Titik Pada Himpunan Dalam Ruang Metrik	21
3.2. Himpunan Terbuka dan Tertutup.....	22
3.3. Himpunan Kompak	26
C. LATIHAN SOAL.....	28
SBAB IV BARISAN DAN DERET BILANGAN REAL	30
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	30
B. URAIAN MATERI	30
4. 1. Barisan dan limit	30
4. 2. Kekonvergnan, Keterbatasan dan Operasi pada barisan konvergen	33
4. 3. Kemonotonan.....	36
4. 4. Barisan Cauchy	39
4. 5. Limit Superior dan Inferior	42
4. 6. Kekonvergenan deret dan deret non negatif	45

4. 7. Deret berganti tanda, Kekonvergenan mutlak dan bersyarat	48
C. LATIHAN SOAL	50
SBAB V BARISAN DAN DERET FUNGSI	52
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	52
B. URAIAN MATERI	52
5. 1. Deret dan Barisan Fungsi konvergen.....	52
5. 2. Konvergen Seragam	55
5. 3. Konvergen Seragam dan Hubungannya dengan Fungsi Kontinu	60
C. LATIHAN SOAL	63
BAB VI TURUNAN	65
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	65
B. URAIAN MATERI	65
6.1. Turunan Fungsi Real	65
6.2. Teorema Rolle, Nilai Rata-rata dan Aturan L' Hopital.....	69
6.3. Kekontinuan Suatu Turunan dan Turunan Tingkat Tinggi.....	72
C. LATIHAN SOAL	73
SBAB VII INTEGRAL	75
A. TUJUAN PEMBELAJARAN	75
B. URAIAN MATERI.....	75
7.1. Integral Riemann	75
7.2. Sifat Kelengkapan Pada R	78
C. LATIHAN SOAL	85
DAFTAR PUSTAKA	

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa dapat:

- (1) Menggunakan sifat-sifat Field untuk membuktikan persoalan yang menyangkut bilangan rasional atau irrasional.
- (2) Membuktikan suatu ketidaksamaan yang diberikan dengan menggunakan sifat-sifat urutan bilangan real.
- (3) Membuktikan suatu ketidaksamaan yang diberikan dengan asumsi dengan eksistensi akar terpenuhi.
- (4) Membuktikan ketaksamaan harga mutlak dengan sifat-sifat harga mutlak.
- (5) Membuktikan bahwa $a, b \in \mathbb{R}$ maka ada $N_\varepsilon(a)$ dan $N_\varepsilon(b)$ sehingga $N_\varepsilon(a) \cap N_\varepsilon(b) \neq \emptyset$.
- (6) Membuktikan persoalan yang menyangkut supremum atau infimum dengan urutan bilangan real.

B. URAIAN MATERI

Sebelum membahas sifat bilangan real, terlebih dahulu yang harus dipahami adalah sistem bilangan real dan sistem bilangan real yang diperluas. Bilangan real yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}$ didefinisikan,

$$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$$

Sedangkan untuk sistem bilangan real yang diperluas, bilangan real dinotasikan sebagai $\mathbb{R}^*$, dengan $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Dalam sistem bilangan real $\mathbb{R}$ berlaku sifat Field/medan (sifat aljabar bilangan real), sifat urutan, dan sifat kelengkapan. Akan tetapi tidak demikian halnya dengan $\mathbb{R}^*$ yang memiliki sifat khusus, tidak masuk bahasan ini.

1.1. Sifat Field Bilangan Real

. Karena bilangan real merupakan suatu Field maka akan di penuhi aksioma-aksioma Field, untuk operasi penjumlahan “+” dan perkalian “x” sebagai berikut :

Aksioma penjumlahan (adisi)

- A1) $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R} \rightarrow x + y \in \mathbb{R}$ (tertutup)
- A2) x dan $y \in \mathbb{R} \rightarrow x + y = y + x$ (komutatif)
- A3) $x, y, z, \in \mathbb{R} \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiatif)
- A4) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, sehingga $0 + x = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- A5) $\forall x \in \mathbb{R}$ berkorespondensi dengan $-x \in \mathbb{R}$ sehingga $x + (-x) = 0$

Aksioma perkalian (multiplikasi)

- M1) $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow xy \in \mathbb{R}$ (tertutup)
- M2) $x, y, \in \mathbb{R} \rightarrow xy = yx \in \mathbb{R}$ (komutatif)
- M3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku $(xy)z = x(yz)$ sifat assosiatif
- M4) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1x = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- M5) $x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \rightarrow \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ sehingga $x(\frac{1}{x}) = 1$
- D) $x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z, \in \mathbb{R}$

Proposisi 1.1.1

Aksioma-aksioma penjumlahan mengakibatkan berlakunya pernyataan-pernyataan berikut:

- a) $x + y = x + z \rightarrow y = z$ (konselasi /penghapusan)
- b) $x + y = x \rightarrow y = 0$ (tunggalnya eksistensi elemen 0)
- c) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$ (tunggalnya eksistensi elemen $-x$ dalam aksioma A5)
- d) $-(-x) = x$

Bukti :

- a) Berdasarkan aksioma penjumlahan, kita peroleh

$$y = 0 + y = (-x + x)y = -x + (x + y) = -x + x = 0 \\ = (-x + x) + z = 0 + z$$

$$x + y = x, \text{ sehingga } y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + x = 0$$

- b) jika $x + y = 0$, maka $y = (x + y) + y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + 0 = -x$

- c) jika $-x + x = 0$, maka untuk $-x, x \in \mathbb{R}$ berlaku $-(-x) + (-x) = 0$; sehingga $x = 0 + x = (-x + x) + x = -(-x) + (-x) + x = -(-x)((-x) + x) = -(-x) + 0 = -(-x)$

Proposisi 1.1.2

Misalkan $x, y, z, \in \mathbb{R}$

- a) Jika $x \neq 0$ dan $xy = 1$ maka $y = 1/x$
- b) Jika $x \neq 0$ maka $1/x \neq 0$ dan $1/(1/x) = x$
- c) Jika $xy = xz$ dan $x \neq 0$ maka $y = z$
- d) Jika $xy = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$

Bukti :

- a) Karena $x \neq 0$ maka terdapat $1/x$ di $\mathbb{R}$ sehingga apabila $xy = 1$ maka

$$(1/x)xy = (1/x \cdot 1)$$

$$(1/x \cdot x)y = 1/x$$

$$1 \cdot y = 1/x \rightarrow y = 1/x$$

Karena $x \neq 0$ maka $1/x$ ada $1/x \neq 0$, andaikan $1/x = 0$, maka diperoleh $x \cdot 1/x = 0 = 1$ (suatu kontradiksi)

Jadi haruslah $1/x \neq 0$, sehingga

$$1/x \cdot 1/(1/x) = x \cdot 1$$

$$x(1/x \cdot 1/(1/x)) = x \cdot 1$$

$$(x \cdot 1/x) 1/(1/x) = x$$

$$1 \cdot 1/(1/x) = x$$

$$1/(1/x) = x$$

- b) karena $x \neq 0$ maka $1/x$ terdefinisi dan $1/x \neq 0$

$x \cdot y = x \cdot z$ sehingga $1/x(xy) = 1/x(xz)$

$$(1/x \cdot x) = (1/x \cdot x)z$$

$$1 \cdot y = 1z \rightarrow y = z$$

- c) karena $x \neq 0$ $1/x \neq 0$

$$xy = 0 \text{ dan } x \cdot 0 = 0$$

$$xy = x \cdot 0$$

$$1/x(xy) = 1/x(x \cdot 0)$$

$$(1/x \cdot x)y = (1/x \cdot x) \cdot 0$$

$$1 \cdot y = 1 \cdot 0$$

$$y = 0$$

Elemen dari $\mathbb{R}$ yang dapat dinyatakan dengan a/b dengan a bilangan bulat $b \neq 0$ disebut bilangan rasional yang dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, jadi

$$\mathbb{Q} = \{x = a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Teorema 1.1.3

Tidak terdapat bilangan rasional t sehingga $t^2 = 2$

Bukti :

Andaikan $t \in \mathbb{Q}$ sehingga $t^2 = 2$, ambil $p, q \in \mathbb{Z}$, genap, maka diperoleh $(p/q)^2 = 2$ dan $(p, q) = 1$. karena $p^2 = 2q^2$, dan p^2 is genap, sehingga p is genap. Akan diperoleh $p = 2m$, untuk $m \in \mathbb{N}$. Jadi $4m^2 = 2p^2$ atau $q^2 = 2m^2$, ini berarti q^2 genap, sehingga didapat q genap. karena p dan q genap dan $(p, q) > 1$ (terjadi kontradiksi untuk $(p, q) = 1$). Jadi, Tidak terdapat bilangan rasional t sehingga $t^2 = 2$.

1.2. Sifat Terurut Pada $\mathbb{R}$

Dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, terdapat himpunan tak kosong P dari $\mathbb{R}$, yaitu bilangan positif yang memenuhi sifat :

- (i) Jika $a, b \in P$ maka $a + b \in P$
- (ii) Jika $a, b \in P$ maka $ab \in P$
- (iii) Jika $a \in \mathbb{R}$, maka tepat satu pernyataan berikut dipenuhi :

$a \in P, a = 0, -a \in P$ (sifat teikotomi)

Definisi 1.2.1

Jika $a \in P$ dikatakan bahwa a bilangan real positif dan ditulis $a > 0$, jika $a \in P$ atau nol dikatakan a bilangan real non negatif ditulis $a \geq 0$. jika $-a \in P$ dikatakan bahwa a bilangan real negatif dan ditulis $a < 0$; jika $a \in P$ atau nol dikatakan bahwa a bilangan non positif dan ditulis $a \leq 0$.

Definisi 1.2.2

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$

- (1) Jika $a - b \in P$, maka dapat ditulis $a > b$ atau $b < a$
 - (2) Jika $a - b \in P \cup \{0\}$, maka dapat ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$
 - (3) Selanjutnya $a < b < c$ artinya $a < b$ dan $b < c$
- Dengan cara yang sama jika $a \leq b$ dan $b \leq c, a \leq b \leq c$

Teorema 1.2.1

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$

- (a) jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$
- (b) terdapat tepat satu hubungan $a < b, a = b, a > b$
- (c) jika $a \geq b$ dan $b \geq a$ maka $a = b$

Teorema 1.2.2

Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$

Bukti :

Sifat trikotomi $a \in P$ atau $-a \in P$. apabila $a \in P$ maka $a^2 = aa \in P$. Apabila $-a \in P$ maka $a^2 = (-a)(-a) \in P$. Jadi $a^2 \in P$, ini berarti $a^2 > 0$.

Teorema 1.2.3

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a > b$, maka $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$

Bukti :

Karena $a > b$, maka $2a = a + a > a + b > b + b = 2b$. Selanjutnya karena $2 > 0$, $\frac{1}{2}(2a) > \frac{1}{2}(a+b) > \frac{1}{2}(2b) = b$. Jadi $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$.

Teorema 1.2.4

Jika $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ maka $a > \frac{1}{2}a > 0$

Bukti :

Dengan mengambil $b = 0$, maka kita peroleh $a > \frac{1}{2}a > 0$.

Teorema 1.2.5

Jika $a \in \mathbb{R}$ sehingga $0 \leq a \leq \epsilon, \forall \epsilon$ positif terkecil, maka $a = 0$

Bukti :

Andaikan $a \neq 0$, maka $a > 0$, akibatnya $a > \frac{1}{2}a > 0$.

Ambil $\epsilon_0 = \frac{1}{2}a > 0$, maka diperoleh $a > \frac{1}{2}a = \epsilon_0 > 0$, ini bertentangan dengan hipotesis yaitu $0 \leq a \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0$. Jadi haruslah $a = 0$.

Teorema 1.2.6

Jika $ab > 0$, maka $a > 0$ dan $b < 0$ atau $a < 0$ dan $b < 0$

Bukti :

Karena $ab > 0$, $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka menurut sifat trikotomi $a > 0$ atau $a < 0$. Untuk kasus $a > 0$, diperoleh $\frac{1}{a}a > 0$, maka dari itu $b = 1 \cdot b = (\frac{1}{a} \cdot a)b = (\frac{1}{a})ab > 0$. Untuk kasus $a < 0$, dengan cara yang sama diperoleh $\frac{1}{a}a < 0$ sehingga $b = (\frac{1}{a})(ab) < 0$.

1.3. Harga Mutlak

Untuk $a \in \mathbb{R}$, harga mutlak a adalah nilai positif dari a atau $-a$.

Definisi 1.3.1

Jika $a \in \mathbb{R}$ harga mutlak a dinotasikan dengan

$$|a| = a; a \geq 0$$

$$|a| = -a; a < 0$$

Teorema 1.3.1

- (a) $|-a| = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
- (b) $|ab| = |a| |b|$
- (c) $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

Bukti :

- (a) $a = 0 \rightarrow |0| = |-0|$
 $a > 0 \rightarrow -a < 0$ sehingga $|a| = a = -(-a) = |-a|$
 $a < 0 \rightarrow -a > 0$ sehingga $|a| = -a = |-a|$
Maka diperoleh $|a| = |-a|$
- (b) Misalkan a atau b atau duanya sama dengan 0, ; jika
 $a > 0, b > 0$, maka $ab > 0$ dan $|ab| = ab = |a||b|$;
Jika $a > 0, b < 0$ maka $ab < 0$ sehingga $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a| |b|$; jika $a < 0, b > 0$, maka $ab < 0$ sehingga
 $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$
- (c) $(\Rightarrow)$,
misalkan $c > 0$ dan $|a| \leq c$, maka diperoleh $-a \leq c$ dan $a \leq c$, atau $-c \leq a$ dan $a \leq c$. Jadi diperoleh $-c \leq a \leq c$
 $(\Leftarrow)$,
misalkan $c > 0$ dan $-c \leq a \leq c$. sehingg $a \leq c$ dan $-a \leq c$,
artinya $|a| \leq c$.
- (d) Dengan menggunakan hasil pada (c) , ambil $c = |a|$,
sehingga diperoleh $-|a| \leq a \leq |a|$

Teorema 1.3.2 (Ketaksamaan segitiga)

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ maka $|a + b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

Gunakan hasil di (d) diperoleh $-|a| \leq a \leq |a|$.

$-|b| \leq b \leq |b|$, sama hasilnya $-|a| + (-|b|) \leq |a| + |b|$

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Itu artinya $|a + b| \leq |a| + |b|$

Lemma 1.3.3

Untuk setiap a, b di $\mathbb{R}$

- (a) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- (b) $|a - b| \leq |a| + |b|$

Bukti :

(a) $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$

jadi, $|a| - |b + b| \leq |a - b| \dots\dots\dots (i)$

maka $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$

jadi $|b| - |a| < |b - a|$, sebaliknya konsekuensinya

$-(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| \dots\dots\dots (ii)$

dari (i) dan (ii) diperoleh $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga,kita peroleh

$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |b|$ jadi $|a - b| \leq |a| + |b|$

1.4. Sifat Kelengkapan Pada R

Sebagai pengantar berikut ini akan diperkenalkan pengertian yang akan selalu dipergunakan baik pada sub bahasan sifat kelengkapan dari R maupun pada pokok bab-bab berikutnya.

Definisi 1.4.1

Andaikan $a \in R$

Untuk $\epsilon > 0$, neighborhood dengan sebuah jarak ϵ adalah subset

$N_\epsilon(a) = \{x \in R | a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$

Neighborhood adalah set yang mana berisi $-\epsilon$ dari a untuk $\epsilon > 0$, ini berarti $N_\epsilon(a) \subseteq N_r(a)$

Teorema 1.4.1

Andaikan $a \in R$, jika x termasuk di neighborhood $N_\epsilon(a)$ untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $x = a$.

Bukti :

x adalah element di neigbourhood a , sehingga $x \in N_\epsilon(a)$, $\forall \epsilon > 0$.

Menurut teorema sebelumnya maka diperoleh $|x - a| = 0$. Ini berarti bahwa $x - a = 0$ atau $x = a$.

Definisi 1.4.2 (infimun dan suprimum)

Ambil S subset di R

(i) $u \in R$, mengatakan diatas batas di S jika $s \leq u, \forall s \in S$

(ii) $w \in R$ mengatakan dibawah batas di di S jika $w \leq s, \forall s \in S$

Contoh : 1.4.1

$S_1 = \{x \in R | x < 10\}, S_2 = \{x \in R | x > 1\}$

Untuk S_1 . 15 adalah batas atas dari tak terhingga banyaknya batas atas. Himpunan batas atas dari S_1 misalnya $U = \{u \in R | u \geq 10\}$. S_1 tidak memiliki batas bawah. Demikian pula S_2 tidak mempunyai batas atas, tetapi mempunyai batas bawah,

misalnya 0, atau $1/2$ dan sebaliknya. Himpunan turunan terbatas seperti contoh S_2 adalah $w = \{w \in \mathbb{R} | w \leq 1\}$.

Dari contoh di atas maka diperoleh catatan sebagai berikut:

- Sub-sets dari $\mathbb{R}$ yang mempunyai batas atas disebut adalah terbatas di atas
- Sedangkan yang mempunyai batas bawah disebut terbatas di bawah, demikian pula yang terbatas di atas dan dibawah dinamakan terbatas.

Definisi 1.4.3

Ambil $S \in \mathbb{R}$

(a) $u \in \mathbb{R}$ supremum di S , jika memenuhi 2 syarat:

1. $s \leq u, \forall s \in S$
2. if $s \leq v, \forall s \in S \rightarrow u \leq v$

(b) $t \in \mathbb{R}$ infimum di S , jika memenuhi 2 syarat :

1. $s \geq t, \forall s \in S$
2. $s \geq r, \forall s \in S \rightarrow t \geq r$

Suprimum adalah istilah lain untuk batas atas terkecil, dan infimum untuk batas bawah terbesar.

Teorema 1.4.2

Sebuah batas atas u di set $s \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}$ adalah suprimum di S jika dan hanya jika untuk semua $\epsilon > 0$ di $S \in S$ maka $u - \epsilon < s$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Misal $u = \sup S$, akibat nya sesuatu $\epsilon > 0$. Karena $u - \epsilon < u$, maka $u - \epsilon$ tidak memiliki batas bawah di S . hasilnya $s \in S$ maka $s > u - \epsilon$, ϵ artinya $u - \epsilon < s$, untuk beberapa $s \in S$.

($\Leftarrow$)

Misal u merupakan batas atas untuk setiap $\epsilon > 0$ menghasilkan $s \in S$ sehingga $u - \epsilon < s$. akan ditunjukkan $u = \sup S$. misal v batas atas maka $v \neq u$. andaikan $v < u$. akibatnya $\epsilon = u - v > 0$. Maka dari hipotesis, $a \in S$ jadi $u - \epsilon < s$, mengakibatkan $u - (u - v) = u < s$. ini kontradiksi dengan pendapat bahwa v adalah batas atas. Jadi haruslah $v > u$, artinya u adalah suprimum di S . jadi $u = \sup S$.

Contoh 1.4.2

a. $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Batas bawah adalah 1 dan infimum adalah 0. Keduanya terletak di S_2 .

- b. $S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. supremum adalah 1 dan infimum adalah 0. Keduanya terletak di S_3 .
- c. Setiap elemen di $\mathbb{R}$ adalah batas atas dan juga batas bawah di set $\emptyset$. jadi set $\emptyset$ tidak memiliki supremum atau infimum.
- Catatan : Supremum termasuk di set dan sering disebut "maksimum", dan infimum termasuk di set dan sering disebut "minimum".

Definisi 1.4.4 (Sifat batas atas terkecil)

Himpunan terurut S dikatakan mempunyai sifat batas atas terkecil, jika setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari S yang terbatas keatas mempunyai supremumnya ada didalam S .

Sedangkan definisi untuk himpunan terurut yang mempunyai sifat batas bawah terbesar diperoleh dengan cara yang serupa yaitu dengan mengganti kata terbatas keatas dengan terbatas kebawah, dan kata supremum dengan kata infimum.

Teorema 1.4.3

S himpunan terurut dengan batas atas terkecil dan A himpunan tidak kosong tidak menurun. Misal B adalah himpunan semua batas bawah di A , maka $b = \sup B$ di S , dan $b = \inf A$. jadi ada $\inf A$ di S .

Bukti:

Karena A himpunan tidak kosong dan monoton ke bawah maka elemen di S yang mana menjadi batas bawah di A . Jadi B himpunan tidak kosong. Sejak himpunan B terbatas keatas di A maka jika $y \in B$, berlaku hubungan $y \leq x, \forall x \in A$ ini berarti beberapa anggota $x \in A$ maka $y \leq x, \forall x \in A$ atau dengan kata lain y adalah batas atas di B . demikian B adalah batas atas dan setiap anggota di A adalah batas bawah di B , karena S memiliki sifat alami, dan B himpunan tidak kosong terbatas, maka $b = \sup B$ di S .

Selanjutnya akan ditunjukkan $b = \inf A$. jika $y < b$, karena $b = \sup B$, maka y bukan batas bawah di B karena setiap anggota di A adalah batas atas B , jadi $y \in A$. sehingga pernyataan tersebut benar:

$$y < b \rightarrow y \in A, \text{ ekuivalen } y \in A \rightarrow b \leq y.$$

Ini berarti b adalah batas bawah A sehingga $b \in B$. Jika $b \in B$ karena $b = \sup B$, maka untuk setiap $x \in B$ harus berlaku $x \leq b$. Jadi $z \in B$. demikian akan ditunjukkan $b \in B$, dan jika $z > b$ maka $z \in B$,

dengan kata lain b terbatas di A , dan jika $z > b$ maka tidak merupakan batas bawah di A . dengan definisi maka b batas bawah terbesar di A jika $b = \inf A$.

Teorema 1.4.4 (Archimedes)

Jika $x \in \mathbb{R}$, maka $n \in \mathbb{N}$, $x < n$.

Bukti:

Andaikan tidak, maka ada $x \in \mathbb{R}$, dengan x batas atas di $\mathbb{N}$. menurut sifat batas atas terkecil $\mathbb{N}$ memiliki di $\mathbb{R}$. karena $u - 1 < u$, maka terdapat $a \in \mathbb{N}$ jadi $u - 1 < a$, yang mana artinya terdapat $u < a + 1$, karena $a \in \mathbb{N}$ dan $a + 1 \in \mathbb{N}$, maka terdapat kontradiksi dengan u batas atas di $\mathbb{N}$. jadi $\mathbb{N}$ harus tidak memiliki batas atas hasilnya :

Jika $x \in \mathbb{R}$ maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ jadi $x < n$

Dalil 1.4.5

Misal y dan z bilangan real positif, maka berlaku :

- (a) Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $z < ny$
- (b) Terdapat $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1/n < y$
- (c) Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n - 1 < z < n$

Bukti :

- (a) Ambil $x = z/y > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $z/y = x < n$, jadi $z/y < n$, hasilnya $z < ny$
- (b) Dari bukti a. ie $z < ny$, ambil $z = 1$. Maka diperoleh $a < ny$, untuk $a \in \mathbb{N}$. akibatnya $1/n < y$ karena $n > 0$ maka $1/n > 0$. jadi $0 < 1/n < y$
- (c) Ambil $n \in \mathbb{N}$. sebut $K + \{m \in \mathbb{N}\}$, $K \neq \emptyset$ ternyata dipilih a minimum $n = K$, maka kita dapatkan $n - 1 \leq z < n$.

Teorema 1.4.6 (eksistensi $\sqrt{2}$)

Terdapat bilangan real positif x sehingga $x^2 = 2$

Bukti :

Misal $S \neq \emptyset$. $S \subseteq \mathbb{R}$. S dibatasi sama dengan 2, karena jika $t > 2$ maka $t^2 > 4$, dengan $t \notin S$. Berdasarkan Teorema sebelumnya S adalah supremum misal $x = \sup S$. akan ditunjukkan bahwa $x^2 = 2$. Andaikan $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

Untuk kasus $x^2 < 2$; maka $(2 - x^2) / (2x + 1) > 0$, berdasarkan akibat 2.4.5, $m \in \mathbb{N}$ jadi terdapat $0 < 1/m < (2 - x^2) / (2x + 1)$ atau $1/n (2x + 1) < 2 - x^2$, padahal $x + 1/n \in S$, dimana $x + 1/n \in S$.

$(x + 1/n)^2 = x^2 + 2x/n + 1/n^2 \leq x^2 + 1/n(2x + 1) < x^2 + (2 - x^2) = 2$

Jadi $x < x + 1/n \in S$, kontradiksi dengan $x = \sup S$. jadi tidak mungkin $x^2 < 2$

kasus $x^2 < 2$; diperoleh $(x^2-2)/2x > 0$. Berdasarkan akibat 2.4.5, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga :

$$1/m < (x^2-2)/2x, \text{ atau } (x-1/m)^2 = x^2 - 2x/m + 1/m^2 > x^2 - 2x/m > x^2 - (x^2-2) = 2.$$

Jadi $x-1/m > s$, untuk setiap $s \in S$ dimana artinya $x-1/m$ batas atas di S , ini kontradiksi dengan $x = \sup S$. jadi tidak mungkin $x^2 > 2$. Dengan kata lain haruslah $x^2 = 2$

Teorema 1.4.7 (Kerapatan bilangan rasional)

Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat sebuah bilangan r sehingga $x < r < y$.

Bukti :

Misal $x > 0$, menurut sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{N}$ demikian $n > 1/(y-x)$, hasil $nx > 0$, maka menurut akibat 2.4.5 hasilnya terdapat $m \in \mathbb{N}$ terdapat $m-1 \leq nx \leq m$ dengan $m < ny$. terdapat diperoleh $nx < m < ny$. pilih $r = m/n$: jadi $x < r < y$ dengan $r = m/n$ bilangan rasional.

Akibat 1.4.8

Jika bilangan real positif x dan y sehingga $x < y$, maka terdapat bilangan irasional z sehingga $x < z < y$ dengan z bilangan irasional.

C. LATIHAN SOAL

1. Jika $a \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat $aa = a$, buktikan bahwa $a = 0$ atau $a = 1$!
2. Jika x dan y bilangan irrasional, tunjukkan bahwa $x + y$ dan xy tidak selalu irrasional!
3. Tunjukkan bahwa ada suatu bilangan real positif s sehingga $s^n = a$, $a > 0$
4. Tunjukkan bahwa $(\frac{1}{2}(a+b))^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan tunjukkan pertidaksamaan dipenuhi apabila $a \geq b$!
5. Asumsikan eksistensi akar, tunjukkan bahwa jika $c > 1$ maka $c^{\frac{1}{m}} < c^{\frac{1}{n}}$ jika dan hanya jika $m > n$!
6. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $|a+b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$!
7. Tunjukkan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \neq b$ maka ada $N\epsilon(a)$ dan $N\epsilon(b)$ sehingga $N\epsilon(a) \cap N\epsilon(b) = \emptyset$!
8. Tunjukkan bahwa, jika A dan B terbatas subser dari $\mathbb{R}$, maka $A \cup B$ terbatas dan $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$!

9. Misalkan $S \neq \emptyset$ subset dari $\mathbb{R}$ terbatas di bawah . buktikan bahwa

$$\inf S = -\sup\{-s | s \in S\}!$$
10. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, tunjukkan bahwa jika $u = \sup S$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka untuk $u - \frac{1}{n}$ bukan batas atas dari S , tetapi $u + \frac{1}{n}$ bukan batas atas dari S !

BAB II

RUANG METRIK

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa dapat:

1. Menunjukkan bahwa suatu ruang yang dilengkapi dengan jarak (R, d) merupakan suatu ruang metrik
2. Menunjukkan suatu bola terbuka di suatu ruang metrik
3. Membuktikan bahwa ruang metric yang diberikan adalah kompak

B. URAIAN MATERI

2. 1. Pengertian Ruang Metriks Secara Umum

Sebagai ilustrasi sebelum sampai kepada pengertian ruang metric secara umum, dapat ditinjau ruang euclides R^2 dan R^3 . Misalkan $A(x_1, x_2)$ dan $B(y_1, y_2)$, maka jarak antara titik A dan B adalah:

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Demikian pula dalam R^3 , misalkan $C(x_1, x_2, x_3)$ dan $D(y_1, y_2, y_3)$, maka jarak antara C dan D adalah: $((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{1}{2}}$. Selanjutnya untuk ruang R^n konsep jarak dapat diperluas, misalkan $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dan $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, maka: $d = \|x - y\| = (\sum (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ dan jika x, y, z titik di R^n dengan mengunakan sifat-sifat norma, maka diperoleh:

- (1) $\|x - y\| \geq 0$
- (2) $\|x - y\| = 0 \leftrightarrow x = y$
- (3) $\|x - y\| = \|y - x\|$
- (4) $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$

Norma $\|x - y\|$ dinamakan jarak atau metric titik x ke y dalam R^n . Dengan demikian ruang Euclides R^n merupakan ruang metric yang ditimbulkan oleh norma dalam R^n dan dapat dituliskan dengan simbol (R^n, d)

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan tak kosong

(a) Fungsi $d : X \times X \rightarrow R$ yang memenuhi syarat :

- (M1) $d(x,y) \geq 0$, untuk setiap $x, y \in X$,
 $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$,
 (M2) $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$, dan
 (M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$,

Yang disebut sebagai **metrik** atau **jarak** pada X .

- (b) Himpunan X dilengkapi oleh suatu metrik d , ditulis dengan cara (X, d) disebut ruang metrik (metric space). Selanjutnya, apabila metrik tersebut tertentu (telah diketahui), maka ruang metrik tersebut hanya ditulis sebagai X saja.
 (c) Anggota dari ruang metrik (X, d) disebut sebagai **titik** dan untuk setiap $x, y \in X$, angka non- negatif $d(x,y)$ disebut sebagai **jarak** dari titik x ke titik y .

Contoh 2.1.1

Himpunan bilangan real R yang dilengkapi dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$ adalah sebuah ruang metrik. Ruang metrik ini disebut **ruang metrik biasa** (*usual metric spaces*).

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan tak kosong X dan didefinisikan sebagai $d : X \times X \rightarrow R$, dengan

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

bisa ditunjukkan bahwa (X, d) ruang metrik. Ruang metrik ini disebut sebagai ruang metrik diskret.

Bukti:

- (M1) untuk $x = y$ atau $x \neq y$ menggunakan $d(x,y) \geq 0$, untuk setiap $x, y \in X$, sehingga dengan menggunakan metrik kita mendapatkan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$,
 (M2) $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \neq x \\ 0, & y = x \end{cases} = d(y,x),$
 (M3) Jika $x = y$ maka $d(x,y) = d(x,x) = 0 \leq d(x,z) + d(z,x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$,
 Jika $x \neq y$ maka berlaku $x \neq y \neq z$ atau $x \neq y = z$ sehingga berlaku
 $d(x,y) = d(x,z) = d(z,y) = 1$, atau $d(x,y) = d(x,z) = 1$ dan $d(z,y) = 0$.

$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) = 1 + d(z,y) = 1$, untuk setiap $x, y, z \in X$, atau

$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) = 1 + d(z,y) = 0$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Contoh 2.1.3

Koleksi semua fungsi komtinu bernilai real atau bernilai kompleks pada $[a, b]$ dinyatakan dengan $C[a, b]$, Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$, didefinisikan

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}, \text{ dan}$$

$$\delta(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Dapat ditunjukkan bahwa $C[a, b]$ merupakan ruang metrik terhadap d , demikian oula terhadap δ .

Bukti:

Diberikan $f, g, h \in C[a, b]$,

(i) $C[a, b]$ merupakan ruang metrik terhadap d

(M1) $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \geq 0$, sebab $|f(x) - g(x)| \geq 0$, untuk setiap $x \in [a, b]$,

$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0$ untuk setiap $x \in [a, b] \Leftrightarrow f = g$

(M2) Karena $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$,

maka $d(f, g) = d(g, f)$.

(M3) Karena $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} \\ &\quad + \sup\{|h(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \\ &= d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

(ii) $C[a, b]$ merupakan ruang metrik terhadap δ

(M1) $\delta(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq 0$, sebab $|f(x) - g(x)| \geq 0$, untuk setiap $x \in [a, b]$,

$\delta(f, g) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0$ untuk setiap $x \in [a, b] \Leftrightarrow$ kecuali di beberapa titik $f = g$,

(M2) Karena $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$,

maka $\delta(f, g) = \delta(g, f)$.

(M3) Karena $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$\begin{aligned}
\delta(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\
&\leq \int_a^b \{|f(x) - g(x)| + |h(x) - g(x)|\} dx \\
&\leq \int_a^b \{|f(x) - g(x)|\} dx + \int_a^b \{|h(x) - g(x)|\} dx \\
&= \delta(f, h) + \delta(h, g)
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.1

Jika d_1, d_2 masing-masing metrik pada himpunan X , maka (X, d) dengan $d = d_1 + d_2$ suatu ruang metrik.

Bukti

Untuk setiap $x, y, z \in X$, maka dipenuhi

(M1) $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) \geq 0$, sebab $d_1(x, y) \geq 0$, $d_2(x, y) \geq 0$

sebagai konsekuensi dari d_1, d_2 masing-masing metrik pada himpunan X ,

(M2) Jika $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) = 0$ maka $d_1(x, y) = 0$, dan $d_2(x, y) = 0$ berakibat $x = y$. Sebaliknya, jika $x = y$ maka

$$d(x, y) = d(x, x) = d_1(x, x) + d_2(x, x) = 0 + 0 = 0$$

(M3) $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$
 $\leq \{d_1(x, z) + d_1(z, y)\} + \{d_2(x, z) + d_2(z, y)\}$
 $\leq d_1(x, z) + d_2(x, z) + d_1(z, y) + d_2(z, y)$
 $= d(x, z) + d(z, y)$

2. 2. Ruang Pseudometrik

Definisi 2.2.1

Diberikan sebarang himpunan tak kosong X . Fungsi $d: X \times X \rightarrow R$ yang memenuhi sifat-sifat metrik kecuali sifat $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, maka (X, d) disebut **ruang psudeometrik**.

Contoh 2.2.1

Misalkan $x, y \in R$, didefinisikan $d(x, y) = |x^2 + y^2|$ dapat ditunjukkan bahwa (R, d) adalah ruang psudeometrik.

Contoh 2.2.2

Jika S adalah himpunan semua barisan yang konvergen dan $\lim x = \lim \{x_n\} = u$, $\lim y = \lim \{y_n\} = v$, dengan $d(x, y) = |u - v|$ maka (S, d) adalah ruang pseudometrik.

2. 3. Bola di Ruang Metrik

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang metrik (X, d) . Untuk sebarang $a \in X$ dan konstanta $r > 0$, himpunan

- (a) $N_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$, disebut **persekitaran (Neighborhood)** titik a dengan jari-jari r . $N_r(a)$ sering pula disebut **bola terbuka (open ball)** dengan titik pusat a dan jari-jari r , sedangkan
- (b) $S_r(a) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$, disebut **luasan bola (Sphere)** dengan titik pusat a dan jari-jari r , dan himpunan
- (c) $\overline{N_r(a)} = N_r(a) \cup S_r(a)$ disebut **bola tertutup** dengan titik pusat a dan jari-jari r .

Contoh 2.3.1

Diberikan ruang metrik (R, d) dengan $d(x, y) = |x - y|$. Untuk sebarang $a \in R$ dan konstanta real $r > 0$, bola terbuka, luasan bola dan bola tertutup berturut-turut:

- (a) $N_r(a) = \{x \in R : d(x, a) = |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$
- (b) $S_r(a) = \{x \in R : d(x, a) = |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}$
- (c) $\overline{N_r(a)} = N_r(a) \cup S_r(a) = \{x \in R : d(x, a) = |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$

Contoh 2.3.2

Diberikan $C[a, b]$ merupakan ruang metrik terhadap

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

Diambil sebarang $f \in C[a, b]$ tetap, dan konstanta $r > 0$. Dengan $f \pm r$ dimaksudkan sebagai fungsi dengan $(f \pm r)(x) = f(x) \pm r, x \in [a, b]$.

- (a) $N_r(f) = \{g \in C[a, b] : d(g, f) < r\}$
$$= \left\{ g \in C[a, b] : \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < r \right\}$$

adalah himpunan semua fungsi kontinu pada $[a, b]$ yang terletak diantara fungsi $f - r$ dan $f + r$ serta tak pernah menyinggung keduanya.

$$(b) \quad S_r(f) = \{g \in C[a, b] : d(g, f) = r\}$$

$$= \left\{ g \in C[a, b] : \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = r \right\}$$

adalah himpunan semua fungsi kontinu pada $[a, b]$ yang terletak diantara fungsi $f - r$ dan $f + r$ serta menyinggung sedikitnya salah satu fungsi tersebut.

$$(c) \quad \overline{N_r(f)} = N_r(f) \cup S_r(f) = \{g \in C[a, b] : d(g, f) \leq r\}$$

$$= \left\{ g \in C[a, b] : \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq r \right\}$$

2. 4. Ruang Metrik Kompak

Definisi 2.4.1

Ruang metrik X dikatakan **lengkap** apabila setiap baris Cauchy di X konvergen di X .

Bukti:

Ambil $\{X_n\}$ sebarang barisan Cauchy di A . Karena $A \subseteq X$, maka $\{X_n\}$ berada di X . Karena X lengkap, maka barisan $\{X_n\}$ konvergen ke $x \in X$. Selanjutnya karena $\{X_n\}$ barisan di A , maka x titik limit dari A . Karena A himpunan tertutup maka $x \in A$. Jadi barisan Cauchy $\{X_n\}$ konvergen di A . Ini mengakibatkan (A, d) ruang metrik lengkap.

Contoh 2.4.1

- (a) $\mathbb{R}$ dengan metric baku adalah ruang metrik lengkap.
- (b) $M = [0, 1]$ dengan metrik harga mutlak adalah ruang metrik lengkap.

Definisi 2.4.2

Diberikan (X, d) suatu ruang metrik, didefinisikan bahwa A subhimpunan dari X **terbatas** jika dan hanya jika terdapat bilangan positif M sehingga $d(x, y) \leq M$, untuk setiap $x, y \in A$. Jika A terbatas didefinisikan diameter dari A sebagai $diam A = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$. Jika A tidak terbatas ditulis $A = \infty$

Contoh 2.4.2

- (a) Jika $X = \mathbb{R}$, dengan metrik baku dan $A = (5, 10)$, maka A terbatas sebab untuk setiap $x, y \in A, d(x, y) \leq 5$.

- (b) $B = (0, \infty)$ tidak terbatas di $\mathbb{R}$ dengan metrik baku, akan tetapi terbatas di $\mathbb{R}$ dengan metrik diskrit, sebab $d(x, y) \leq 1$, untuk setiap $x, y \in B$.

Definisi 2.4.3

(X, d) suatu ruang metrik, himpunan A subset dari X disebut **terbatas total** jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapatlah sejumlah berhingga himpunan $A_1, A_2, \dots, A_n$ di X , dengan $\text{diam } A_k < \varepsilon, k = 1, 2, 3, \dots, n$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Contoh 2.4.3

R_d ruang metrik diskret, dan $A = (0, 1) \subseteq R_d$. Jelas A terbatas $d(x, y) \leq 1$, untuk setiap $x, y \in A$, tetapi A tidak terbatas total sebab jika diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$ maka tidak terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_0} A_k$, sebab A_k hanya memuat paling banyak satu titik.

Definisi 2.4.4

Ruang metrik (X, d) disebut **kompak** apabila (X, d) ruang metrik **lengkap** dan **terbatas total**.

Contoh 2.4.4

- (a) $K = [0, 1]$ dengan metrik harga mutlak, K himpunan tertutup maka K lengkap, K terbatas di $\mathbb{R}$, Jadi K terbatas total. Jadi K kompak.
- (b) Akan tetapi apabila K dilengkapi dengan metrik diskret maka K tidak terbatas total, akibatnya K tidak kompak.

C. LATIHAN SOAL

1. Jika $X = \emptyset$ dan $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ buktikan bahwa (X, ρ) ruang metrik!
2. Jika (X, d) ruang metrik dan didefinisikan $\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, untuk setiap $x, y \in X$. Buktikan bahwa (X, δ) ruang metrik, dan $\delta(x, y) \leq d(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$!
3. Dalam ruang metrik (X, δ) buktikan bahwa $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$!
4. Tentukan persekitaran $N_r(\bar{a})$ dan luasan bola $N_r(\bar{a})$ di dalam ruang metrik

$$(\mathbb{R}^2, d_2) \text{ dengan } d_2(\bar{x}, \bar{a}) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2!$$

(R^2, d_∞) dengan $d_\infty(\bar{x}, \bar{a}) = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\}$!

5. Untuk setiap $k, k=1,2,3,\dots,n$ diketahui (X, d_k) ruang metrik. Dibentuk

(i) $d_\infty(x, y) = \max\{d_2(x, y): k = 1,2,3, \dots, n\}$ untuk setiap $x, y \in X$.

(ii) Jika $1 \leq p \leq \infty$, $D_p(x, y) = \{\sum_{k=1}^n d_k(x, y)^p\}^{\frac{1}{p}}$ untuk setiap $x, y \in X$.

Buktikan bahwa (X, d_∞) dan (X, d_p) masing-masing ruang metrik.

6. Untuk setiap $k, k=1,2,3,\dots,n$ diketahui (X_k, d_k) ruang metrik. Jika $X = X_k, X_k, X_k, \dots, X_k = \{\bar{x} = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} : x_k \in X_k, k = 1,2,3, \dots, n$ dan

(i) $d_\infty(x, y) = \max\{d_2(x_k, \square_k): k = 1,2,3, \dots, n\}$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in X$.

(ii) Jika $1 \leq p \leq \infty$, $D_p(x, y) = \{\sum_{k=1}^n d_k(x, y)^p\}^{\frac{1}{p}}$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in X$.

Buktikan bahwa (X, d_∞) dan (X, d_p) masing-masing ruang metrik!

7. Selidiki apakah (X, d) ruang metrik, jika $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$!

8. Misalkan $x, y \in R$ didefinisikan $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ buktikan bahwa (R, d) adalah ruang pseudometrik!

9. Buktikan Bahwa ruang metric diskrit R_d adalah lengkap!

10. Buktikan bahwa himpunan berhingga S dengan metrik baku maupun metrik diskret adalah kompak!

BAB III

TOPOLOGI RUANG KARTESIS

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa dapat:

1. Menunjukkan kedudukan terhadap Himpunan pada Ruang Metrik
2. Menunjukkan suatu himpunan terbuka atau tertutup
3. Membuktikan bahwa rsuatu himpunan adalah kompak

B. URAIAN MATERI

3.1. Kedudukan Titik Pada Himpunan Dalam Ruang Metrik

Definisi 3.1.1

Neighborhood/persekitaran $p \in X$ dengan jari-jari r dapat didefinisikan sebagai himpunan semua titik $q \in X$ dengan $d(p, q) < r$, ditulis $N_r(p) = \{q | d(p, q) < r\}$.

Contoh 3.1.1

Diberikan X suatu ruang metric, dengan $X \neq \emptyset$ dan

$$d(p, q) = \begin{cases} 1, & \text{jika } p \neq q \\ 0, & \text{jika } p = q \end{cases}$$

Maka $N_{\frac{1}{2}}(p) = \{p\}$, dan $N_2(p) = X$

Titik $p \in E$, $E \subseteq X$ disebut **titik limit** E jika setiap $N_r(p)$ memuat $q \in E$ dan $q \neq p$. $\forall N_r(p), N_r(p) - \{p\} \cap E \neq \emptyset$. Himpunan semua titik limit E ditulis E' atau E^d (dibaca E derived), dinotasikan dengan $E^d = \{p | p \text{ titik limit } E\}$.

Contoh 3.1.2

Diberikan R ruang metrik biasa, dengan metrik $d = \text{jarak}$, $E = (0, 1] \cup \{2, 3\}$, maka himpunan titik limit $E = [0, 1]$.

Contoh 3.1.3

Diberikan R^3 ruang metrik biasa $E \subseteq R^2$, dengan $E = \{(x, y) | x = 1, -1 \leq y < 1\}$, maka himpunan semua titik limit E adalah $E^d = \{(x, y) | x = 1, -1 \leq y < 1\}$

- a) Jika $p \in E$, tapi p bukan titik limit E maka p disebut **titik terasing** (isolated poin).

Contoh 3.1.4

Pada contoh 7.1.2 diberikan $E = (0, 1] \cup \{2, 3\}$, maka $\{2, 3\}$ adalah himpunan titik-titik terasing dari E .

- b) Titik p disebut **titik interior** E jika terdapat $N_r(p)$ dengan $N_r(p) \subseteq E$. Himpunan semua titik interior E ditulis E^0 .

Contoh 3.1.5

Diberikan R ruang metric biasa. $E = [0, 1]$, maka $E^0 = (0, 1)$, $R^0 = R$, dan $\emptyset^0 = \emptyset$.

- c) Titik p disebut **titik eksterior** E jika p titik interior dari E^c .

Contoh 3.1.6

Diberikan R ruang metrik biasa, $E = [0, 1]$, maka himpunan semua titik eksterior E adalah $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

- d) Titik p disebut **titik batas** (boundary) E jika p bukan titik interior maupun titik eksterior E .

Contoh 3.1.7

Misalkan $E = \{1, 2, 3, 4\}$, maka titik-titik 1, 2, 3, 4 adalah titik-titik batas, sebab bukan interior maupun eksterior. Di samping itu pula juga merupakan titik-titik terasing sebab 1, 2, 3, 4 adalah anggota E , tapi 1, 2, 3, 4 bukan titik-titik limit E .

3.2. Himpunan Terbuka dan Tertutup

Definisi 3.2.1

Himpunan $E \subseteq X$ dikatakan **terbuka** jika untuk setiap $p \in E$, terdapat $N_r(p)$, sehingga $N_r(p) \subseteq E$. Dengan kata lain, E terbuka jika setiap titik anggota E adalah titik interior.

Contoh 3.2.1

$(2, 4)$, $(3, 5) \cup (7, 8)$, $\emptyset$, dan R adalah himpunan-himpunan terbuka di R .