

SOAL - SOAL VEKTOR



SOAL-SOAL VEKTOR

Ari Indriani, S.Pd., M.Pd.



SOAL-SOAL VEKTOR

Penulis:
Ari Indriani, S.Pd., M.Pd.

Editor:
Erik Santoso

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Oktober 2023

Hak Cipta 2023, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Rafflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2023 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2023
; 21 x 29 cm
ISBN : 978-623-448-667-4

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Puji Syukur kami panjatkan kepada Allah SWT atas karunia yang telah dilimpahkan, sehingga dapat menyelesaikan penulisan buku ajar yang berjudul Soal-Soal Vektor ini sampai dengan selesai.

Buku ini memuat tentang materi secara garis besar, soal dan pembahasan, soal dan kunci jawaban serta soal pada materi vektor dan skalar; hasil perkalian vektor; deferensiasi vektor; gradien, divergensi dan curl; integral vektor; teorema divergensi, stokes, dan lainnya yang bisa digunakan sebagai salah satu referensi dalam pembelajaran matakuliah vektor. Buku ini disajikan dengan bahasa yang sederhana, agar dapat membantu dan mempermudah mahasiswa dalam memahami vektor.

Buku ini tentunya masih banyak kekurangan. Penulis sangat mengharapkan kritik yang membangun untuk memperbaiki buku ini. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat kepada pembacanya, serta dapat memberikan kontribusi yang positif terhadap perkembangan pendidikan di Indonesia.

Bojonegoro, Oktober 2023
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB I VEKTOR DAN SKALAR	1
A. Pengertian	1
B. Macam-Macam Vektor	2
C. Operasi dalam Vektor dan Skalar	4
D. Soal-Soal yang Dipecahkan	4
E. Soal-Soal Tambahan	6
 BAB II HASIL KALI TITIK DAN SILANG	 13
A. Hasil Kali Titik (Dot Product)	13
B. Hasil Kali Silang (Cross Product)	14
C. Hasil Kali Tripel	15
D. Soal-Soal Yang Dipecahkan	16
E. Soal-Soal Tambahan	19
 BAB III DEFERENSIASI VEKTOR	 25
A. Pengertian Deferensiasi Vektor	25
B. Sifat Deferensiasi Vektor	26
C. Turunan Parsial dari Vektor	26
D. Soal-Soal yang Dipecahkan	27
E. Soal-Soal Tambahan	30

BAB IV GRADIEN, DIVERGENSI, DAN CURL	37
A. Operator Del atau Nabla (∇)	37
B. Gradien	37
C. Divergensi	37
D. Curl	38
E. Soal-Soal yang Dipecahkan	38
F. Soal-Soal Tambahan	39
 BAB V INTEGRASI VEKTOR	 43
A. Integral Biasa	43
B. Intergral Garis	44
C. Integral Permukaan	47
D. Integral Volume	48
E. Soal-Soal yang Dipecahkan	48
F. Soal-Soal Tambahan	53
 BAB VI TEOREMA DIVERGENSI, TEOREMA STOKES, DAN TEOREMA-TEOREMA YANG BERKAITAN	 57
A. Teorema Green Dalam Bidang	57
B. Teorema Stokes	58
C. Teorema Divergensi Gauss	59
D. Soal-Soal yang Dipecahkan	60
E. Soal-Soal Tambahan	61
 DAFTAR PUSTAKA	 65

BAB I VEKTOR DAN SKALAR

A. Pengertian

Ada dua macam besaran yaitu:

1. Skalar

Yaitu besaran yang hanya mempunyai nilai atau besar tanpa arah.

Contoh: suhu tubuh, berat, panjang, luas, volume dan lain sebagainya.

2. Vektor

Yaitu besaran yang mempunyai nilai atau besar dan arah.

Contoh: kecepatan, gaya, percepatan dan lain sebagainya.

Secara grafis vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah



Garis



Vektor



Ruas garis

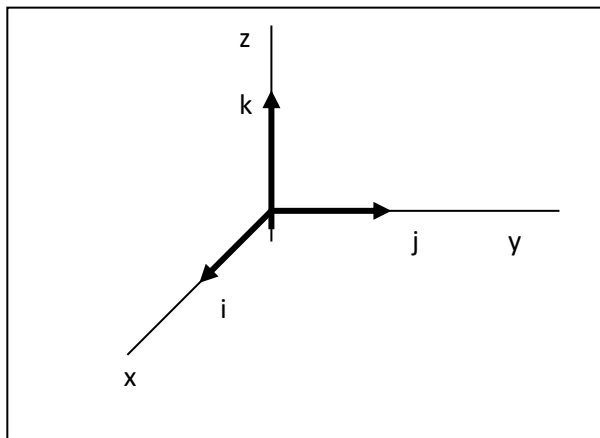
B. Macam-Macam Vektor

1. Vektor Nol

Yaitu vektor yang besarnya nol, dan arahnya tak tentu.

2. Vektor Satuan

Yaitu vektor yang besarnya satu satuan. Jika ada vektor $\underline{a}$ yang tak nol, maka $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ adalah vektor satuan yang searah dengan $\underline{a}$. Vektor satuan searah dengan sumbu koordinat:



$\underline{i}$ adalah vektor satuan searah sumbu x^+ .

$\underline{j}$ adalah vektor satuan searah sumbu y^+ .

$\underline{k}$ adalah vektor satuan searah sumbu z^+ .

3. Vektor Posisi

Jika diketahui titik $P(x, y, z)$, maka $\overrightarrow{OP}$ atau $\underline{p}$ disebut vektor posisi.

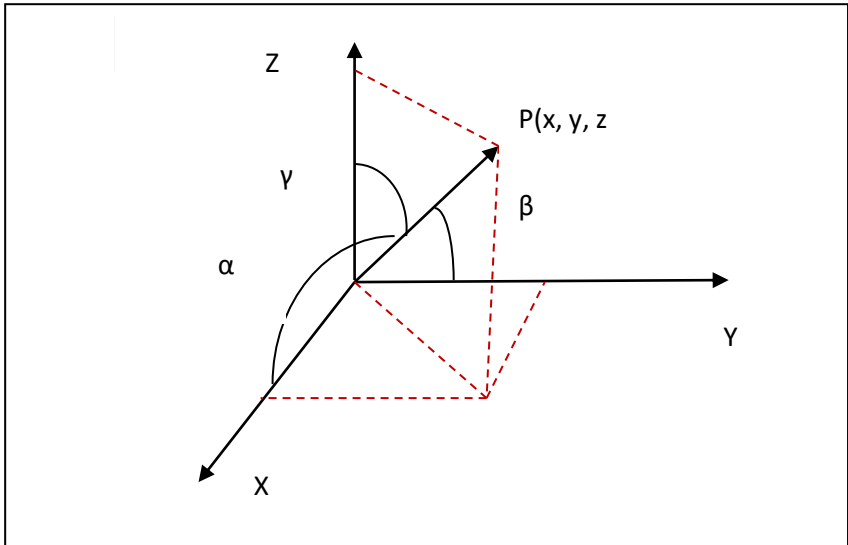
$$\underline{p} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$|\underline{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

α, β, γ dinamakan sudut-sudut arah, sedangkan $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ dinamakan cosinus arah.

Jika ada $a, b, c \ni \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c$,
di mana a, b, c dinamakan bilangan arah.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



C. Operasi dalam Vektor dan Skalar

Adapun operasi pada vektor dan skalar, misal $\underline{A} = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$; $\underline{B} = x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}$ dan skalar m maka:

$$1. \underline{A} + \underline{B} = (x_1 + x_2) \underline{i} + (y_1 + y_2) \underline{j} + (z_1 + z_2) \underline{k}$$

$$2. \underline{A} - \underline{B} = (x_1 - x_2) \underline{i} + (y_1 - y_2) \underline{j} + (z_1 - z_2) \underline{k}$$

$$3. m\underline{A} = m(x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}) = (m x_1) \underline{i} + (m y_1) \underline{j} + (m z_1) \underline{k}$$

$$4. |\underline{A}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2}$$

D. Soal-Soal yang Dipecahkan

1. Nyatakan manakah data di bawah ini yang termasuk vektor dan yang termasuk skalar
 - a. Berat
 - b. Kalori
 - c. Panas jenis
 - d. Momentum
 - e. Kerapatan
 - f. Energi
 - g. Volume
 - h. Jarak
 - i. Kecepatan
 - j. Intensitas medan magnetik

Jawaban:

- | | |
|-----------|-----------|
| a. Skalar | f. Vektor |
| b. Vektor | g. Skalar |
| c. Skalar | h. Skalar |
| d. Vektor | i. Vektor |
| e. Vektor | j. Vektor |

2. Diketahui $\underline{r}_1 = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$; $\underline{r}_2 = 2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{r}_3 = -\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$. Carilah

besarnya:

- a. $\underline{r}_3$
b. $\underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3$
c. $2\underline{r}_1 - 3\underline{r}_2 - 5\underline{r}_3$

Jawaban:

- a. $\left| \underline{r}_3 \right| = \left| -\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$
- b. $\left| \underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3 \right| = \left| (3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}) + (2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}) + (-\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}) \right| = \sqrt{32}$

$$\begin{aligned}
 c. \quad 2\underline{r}_1 - 3\underline{r}_2 - 5\underline{r}_3 &= 2(3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}) - \\
 &3(2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}) - 5(-\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}) = \\
 &5\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k} \\
 \left| 2\underline{r}_1 - 3\underline{r}_2 - 5\underline{r}_3 \right| &= \sqrt{30}
 \end{aligned}$$

3. Carilah sebuah vektor satuan yang sejajar resultan dari vektor-vektor $\underline{r}_1 = 2\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k}$; $\underline{r}_2 = \underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$!

Jawaban:

$$\begin{aligned}
 R &= \underline{r}_1 + \underline{r}_2 = (2\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k}) + (\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}) = \\
 &3\underline{i} + 6\underline{j} - 2\underline{k}
 \end{aligned}$$

$$|R| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$$

Maka vektor yang sejajar dengan R adalah

$$\frac{R}{|R|} = \frac{3\underline{i} + 6\underline{j} - 2\underline{k}}{7}$$

E. Soal-Soal Tambahan

1. Nyatakan manakah dari yang berikut ini skalar dan manakah yang vektor:
 - a. Berat
 - b. Energi
 - c. Kecepatan

- d. Jarak
- e. Volume

Jawaban:

- a. Skalar
- b. Vektor
- c. Vektor
- d. Skalar
- e. Skalar

2. Buktikan bahwa $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Jawaban:

Terbukti bahwa $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

3. Jika $\underline{r}_1 = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$; $\underline{r}_2 = \underline{i} + 3\underline{j} - 2\underline{k}$; $\underline{r}_3 = -2\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{r}_4 = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 5\underline{k}$. Carilah a, b, c sehingga $\underline{r}_4 = a\underline{r}_1 + b\underline{r}_2 + c\underline{r}_3$!

Jawaban:

$$a = -2; b = 1; c = -3$$

4. Vektor-vektor kedudukan dari titik-titik P dan Q diberikan oleh Jika $\underline{r}_1 = 2\underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k}$; $\underline{r}_2 = 4\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k}$. Tentukan PQ dalam $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ dan carilah besarnya.

Jawaban:

$$PQ = 2\underline{i} - 6\underline{j} + 3\underline{k} ; |PQ| = 7$$

5. Jika $\underline{A} = 3\underline{i} - \underline{j} - 4\underline{k}$; $\underline{B} = -2\underline{i} + 4\underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{C} = \underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$, carilah:

- $2\underline{A} - \underline{B} + 3\underline{C}$
- $|\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}|$
- $|3\underline{A} - 2\underline{B} + 4\underline{C}|$
- Vektor satuan yang sejajar dengan $3\underline{A} - 2\underline{B} + 4\underline{C}$

Jawaban:

- $11\underline{i} - 8\underline{k}$
- $2\underline{i} + 5\underline{j} - 8\underline{k} ; \sqrt{93}$
- $\sqrt{398}$
- $\frac{17\underline{i} - 3\underline{j} - 10\underline{k}}{\sqrt{398}}$

6. Gaya-gaya berikut bekerja pada sebuah partikel

P: $\underline{F}_1 = 2\underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}$; $\underline{F}_2 = -5\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$; $\underline{F}_3 = \underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k}$; $\underline{F}_4 = 4\underline{i} - 3\underline{j} - 2\underline{k}$ yang diukur dalam Newton. Carilah:

- Resultan dari gaya-gaya
- Besarnya resultan

Jawaban:

a. $2\underline{i} - \underline{j}$

b. $\sqrt{5}$

7. Ditentukan $\underline{A} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$; $\underline{B} = 2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{C} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$,

a. Hitunglah $p = 2\underline{A} + 3\underline{B} - 5\underline{C}$

b. Besarnya p

c. Tentukan besar cosinus arah dari p

d. Tentukan vektor satuan yang searah dengan $\underline{D} = 2\underline{A} - \underline{B} + 2\underline{C}$

e. Jika $\underline{E} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 5\underline{k}$, maka tentukan konstanta p, q, r sehingga $2\underline{E} = p\underline{A} + q\underline{B} + r\underline{C}$.

Jawaban:

a. $7\underline{i} - 26\underline{j} - 17\underline{k}$

b. $\sqrt{1014}$

c. $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{1014}}$; $\cos \beta = \frac{-26}{\sqrt{1014}}$; $\cos \gamma = \frac{-17}{\sqrt{1014}}$

d. $\frac{6\underline{i} + 4\underline{j} + 9\underline{k}}{\sqrt{133}}$

e. $p = \frac{5}{2}$; $q = -\frac{3}{2}$; $r = \frac{3}{2}$

8. Jika $\underline{A} = 2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{B} = -3\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$; $\underline{C} = \underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}$, carilah

- a. $2\underline{A} + \underline{B} - \underline{C}$
- b. $\underline{A} - 3\underline{B} + 2\underline{C}$
- c. $|3\underline{A} - 2\underline{B} + 4\underline{C}|$

Jawaban:

- a. $-\underline{j} - 8\underline{k}$
- b. $13\underline{i} - 22\underline{j} + 2\underline{k}$
- c. $\sqrt{86}$

9. Sederhanakanlah $2\underline{A} + \underline{B} + 3\underline{C} - (\underline{A} - 2\underline{B} - 2(2\underline{A} - 3\underline{B} - \underline{C}))!$

Jawaban:

$$5\underline{A} - 3\underline{B} + \underline{C}$$

10. Diketahui: $\underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} + 4\underline{k}$; $\underline{b} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$; $\underline{c} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$.

- a. Hitunglah $\underline{p} = 2\underline{a} - 3\underline{b} + 4\underline{c}$
- b. Tentukan vektor satuan yang searah dengan $\underline{d} = 3\underline{a} + \underline{b} - 2\underline{c}$

Jawaban:

- a. $3\underline{i} + 23\underline{k}$
- b. $\frac{5\underline{i} - 5\underline{j} + 5\underline{k}}{5\sqrt{3}}$

11. Diketahui $\underline{a} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k}$; $\underline{b} = -3\underline{i} + 2\underline{k}$; $\underline{c} = 3\underline{i} - 2\underline{j} - 3\underline{k}$. Carilah vektor satuan yang sejajar dengan $\underline{d} = 3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$!
12. Ditentukan $\underline{A} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$; $\underline{B} = 2\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{C} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$,
- Hitunglah $\underline{p} = 2\underline{A} + 3\underline{B} - 5\underline{C}$
 - Tentukan besar cosinus arah dari $\underline{p}$
13. Dari soal No 11, tentukan besar cosinus arah dari $\underline{p}$ jika $\underline{p} = 2\underline{a} - 3\underline{b} + 4\underline{c}$!
14. Diketahui $\underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$; $\underline{b} = -2\underline{j} - 4\underline{k}$; $\underline{c} = 2\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$; $\underline{d} = 3\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}$. Tentukan konstanta p, q, r sehingga $3\underline{c} = p\underline{a} + q\underline{b} + r\underline{d}$!
15. Dari soal No 14, tentukan $\underline{a} + 2\underline{b} - 3\underline{c}$!

BAB II

HASIL KALI TITIK DAN SILANG

A. Hasil Kali Titik (Dot Product)

Hasil kali titik atau skalar dari dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ ditulis $\underline{a} \cdot \underline{b}$ didefinisikan sebagai hasil kali antara besarnya vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dan cosinus sudut θ antara keduanya. Sifat-sifat perkalian titik antara lain:

- a. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
- b. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$
 $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$
- c. Jika m adalah skalar, maka: $m(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (m\underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (m\underline{b}) = (\underline{a} \cdot \underline{b})m$
- d. $\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$
 $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{i} \cdot \underline{k} = 0$
- e. Jika $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ dan $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$ maka
 $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
 $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$