



# BUKU AJAR KAPITA SELEKTA

Novi Mayasari  
Anita Rahayu  
Amelya Amandha  
Indah Wahyuni



# BUKU AJAR KAPITA SELEKTA

Penulis:  
Novi Mayasari  
Anita Rahayu  
Amelya Amandha  
Indah Wahyuni

Editor:  
Erik Santoso

Layouter :  
Tim Kreatif PRCI

Cover:  
Rusli

Cetakan Pertama : Oktober 2023

Hak Cipta 2023, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

**Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia**  
**ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT**  
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151  
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : [www.rcipress.rcipublisher.org](http://www.rcipress.rcipublisher.org)  
E-mail : [rumahcemerlangindonesia@gmail.com](mailto:rumahcemerlangindonesia@gmail.com)

Copyright © 2023 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia  
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2023  
; 21 x 29 cm  
ISBN : -

Hak cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan  
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang  
**Hak Cipta Pasal 72**

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta  
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar. Tak lupa juga mengucapkan salawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW, karena berkat beliau, kita mampu keluar dari kegelapan menuju jalan yang lebih terang.

Kami ucapkan juga rasa terima kasih kami kepada pihak-pihak yang mendukung lancarnya buku Buku Ajar ajar ini mulai dari proses penulisan awal hingga akhir, yaitu orang tua kami, rekan-rekan kami. Adapun, buku Buku Ajar ajar kami yang berjudul “Buku Ajar Kapita Selekta” ini telah selesai kami buat secara semaksimal dan sebaik mungkin agar menjadi manfaat bagi pembaca yang membutuhkan informasi dan pengetahuan mengenai matematika.

Kami sadar, masih banyak luput dan kekeliruan yang tentu saja jauh dari sempurna tentang buku ini. Oleh sebab itu, kami mohon agar pembaca memberi kritik dan juga saran terhadap karya buku Buku Ajar ini agar kami dapat terus meningkatkan kualitas buku Buku Ajar ajar ini.

Demikian buku ajar ini kami buat, dengan harapan agar pembaca dapat memahami informasi dan juga mendapatkan wawasan mengenai bidang matematika serta dapat bermanfaat bagi masyarakat dalam arti luas. Terima kasih.

Bojonegoro

Penulis

# DAFTAR ISI

|                                                                          |            |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                                              | <b>iii</b> |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                                                  | <b>iv</b>  |
| <b>BAB 1 ALJABAR .....</b>                                               | <b>1</b>   |
| A. Konsep Dasar Cabang Ilmu Matematika.....                              | 2          |
| B. Pemfaktoran Dan Penguraian .....                                      | 4          |
| C. Latihan Soal.....                                                     | 6          |
| <b>BAB 2 BARISAN, DERET, DAN FUNGSI .....</b>                            | <b>7</b>   |
| A. Barisan Dan Deret .....                                               | 8          |
| B. Fungsi .....                                                          | 10         |
| C. Latihan Soal .....                                                    | 12         |
| <b>BAB 3 PERSAMAAN LINEAR .....</b>                                      | <b>13</b>  |
| A. Persamaan Linear Satu Variabel .....                                  | 14         |
| B. Persamaan Linear Dua Variabel .....                                   | 15         |
| C. Persamaan Linear Tiga Variabel .....                                  | 17         |
| D. Latihan Soal .....                                                    | 20         |
| <b>BAB 4 STATISTIKA.....</b>                                             | <b>21</b>  |
| A. Rataan Aritmetik (Arithmetic Mean) .....                              | 22         |
| B. Median (Nilai Tengah) .....                                           | 23         |
| C. Modus (Mode) .....                                                    | 23         |
| D. Latihan Soal.....                                                     | 25         |
| <b>BAB 5 TEORI BILANGAN .....</b>                                        | <b>27</b>  |
| A. Sifat penjumlahan dan perkalian.....                                  | 28         |
| B. Sifat-sifat Keterbagian.....                                          | 28         |
| C. Uji Habis dibagi .....                                                | 29         |
| D. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dan Persekutuan Terkecil (KPK)..... | 30         |
| E. Banyaknya Faktor Positif .....                                        | 32         |
| F. Kekongruenan.....                                                     | 32         |
| G. Fungsi Tangga dan Ceiling.....                                        | 33         |
| H. Pembagian bersisa .....                                               | 34         |
| I. Latihan Soal .....                                                    | 35         |
| <b>BAB 6 MACAM-MACAM BILANGAN .....</b>                                  | <b>37</b>  |
| A. Bilangan Bulat .....                                                  | 38         |
| B. Bilangan Rasional.....                                                | 41         |
| C. Bilangan Tak Rasional .....                                           | 42         |
| D. Bilangan Kuadrat Sempurna.....                                        | 43         |
| <b>BAB 7 GEOMETRY .....</b>                                              | <b>44</b>  |
| A. Trigonometry .....                                                    | 45         |
| B. Konsep Segi Empat .....                                               | 48         |
| C. Segitiga .....                                                        | 50         |

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| D. Soal Latihan.....                           | 52        |
| <b>BAB 8 FUNGSI KHUSUS .....</b>               | <b>55</b> |
| A. Fungsi Floor (Floor Function).....          | 56        |
| B. Fungsi Ceiling (Ceiling Function).....      | 57        |
| C. Fungsi Buku Ajar .....                      | 58        |
| D. Fungsi Faktorial.....                       | 59        |
| E. Fungsi Eksponensial.....                    | 59        |
| F. Fungsi Logaritmik .....                     | 59        |
| G. Fungsi Rekursif .....                       | 59        |
| H. Latihan Soal.....                           | 60        |
| <b>BAB 9 PRINSIP INKLUSI DAN EKSKLUSI.....</b> | <b>61</b> |
| A. Pengertian.....                             | 62        |
| B. Soal Latihan.....                           | 63        |
| <b>KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>              | <b>64</b> |
| <b>KUNCI JAWABAN .....</b>                     | <b>64</b> |
| <b>DAFTAR REFERENSI .....</b>                  | <b>92</b> |

# BAB

# 1

# ALJABAR

## SUBBAB

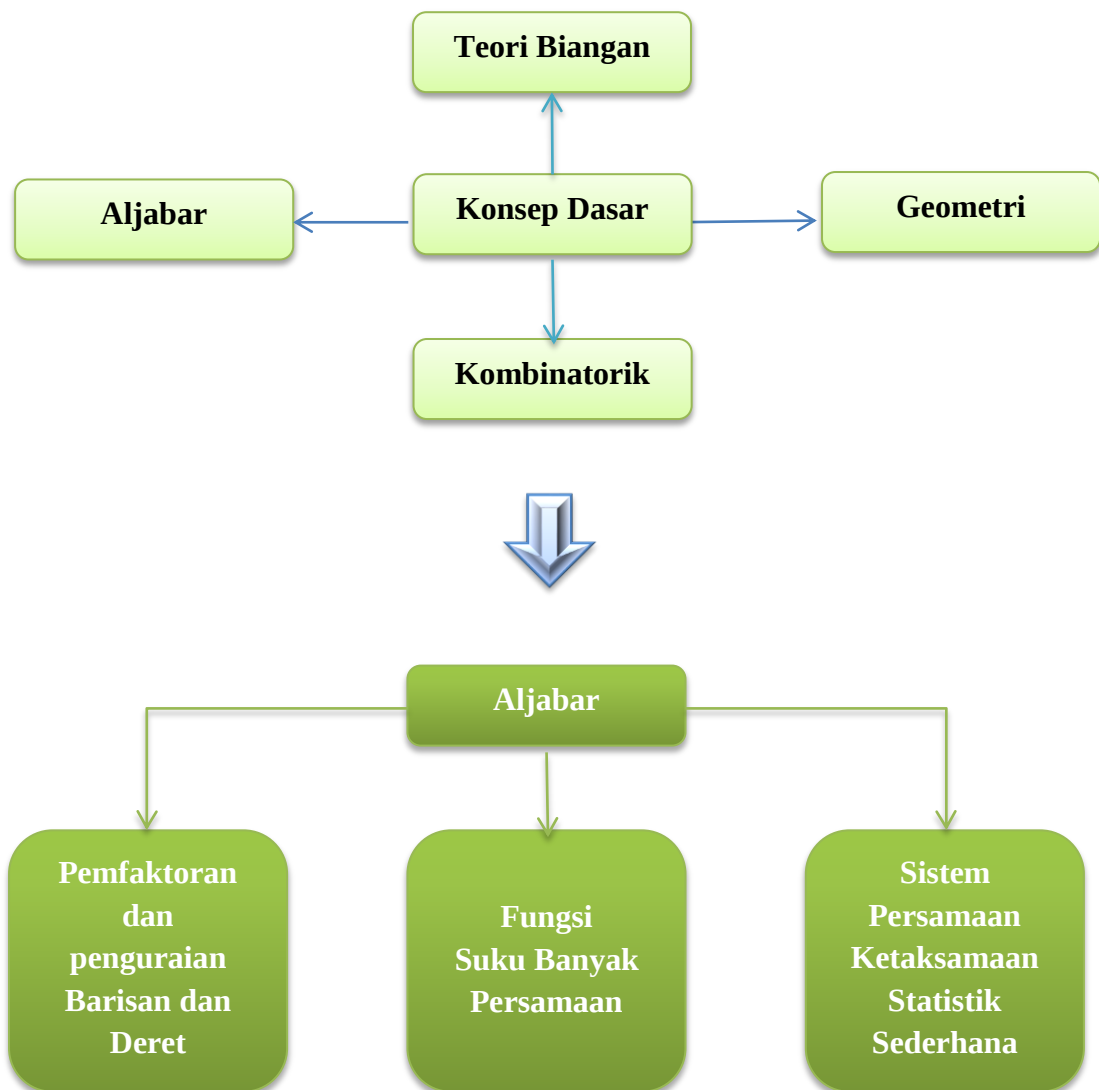
- Konsep Dasar Cabang Ilmu Matematika
- Pemfaktoran Dan Penguraian
- Latihan Soal

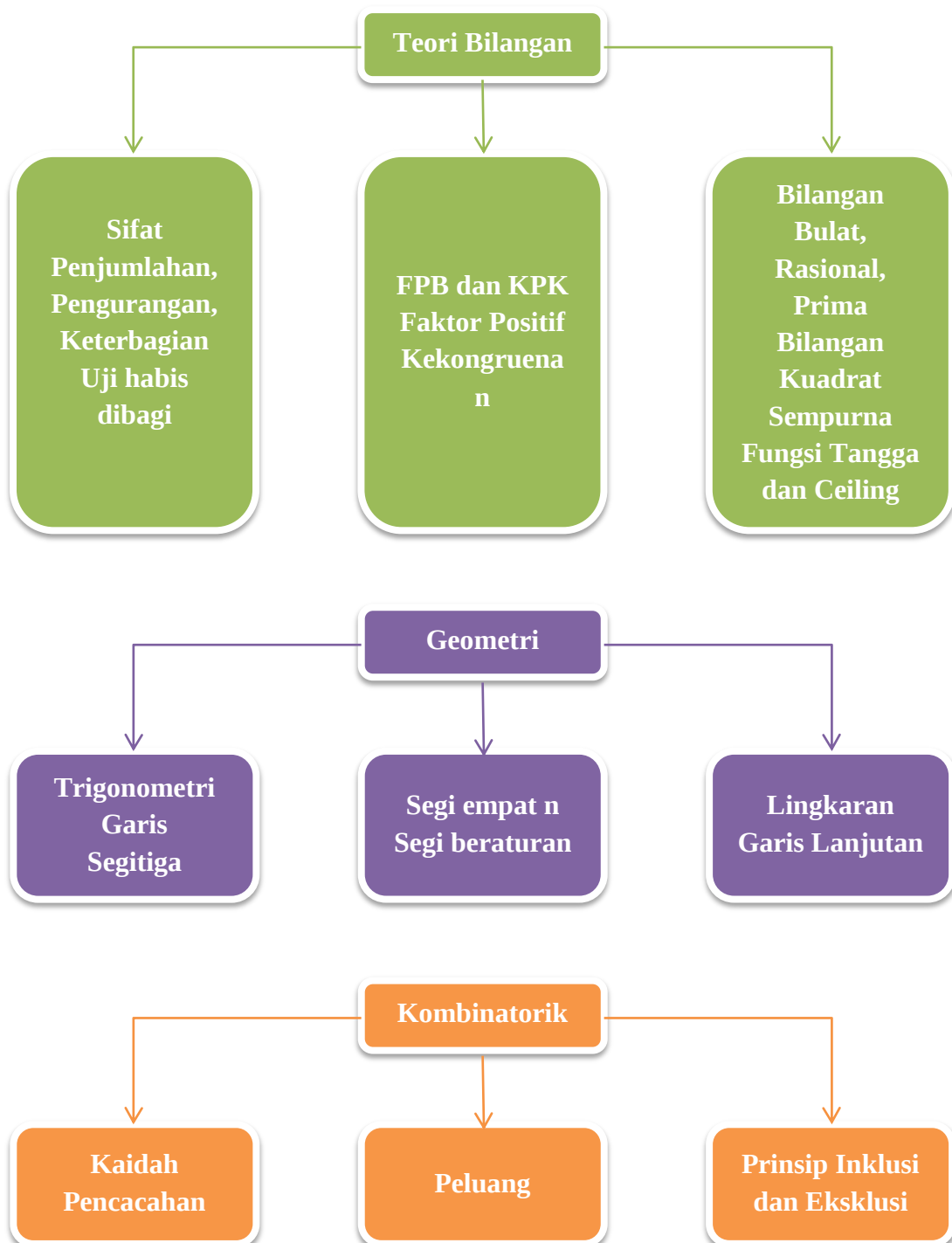
*Algebra*

## Steve Jobs

Satu-satunya cara untuk melakukan pekerjaan yang hebat adalah dengan mencintai apa yang kamu lakukan. Jika kamu belum menemukannya, teruslah mencari. Jangan puas.

## A. Konsep Dasar Cabang Ilmu Matematika





## B. Pemfaktoran Dan Penguraian

### Kamu Harus Tahu !!!

- $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$  dengan n anggota bilangan asli
- $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$  dengan n anggota bilangan ganjil
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$



### Kamu Harus Tahu !!!

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\(x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \\(x - y)^3 &= x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \\(x + y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\(x - y)^4 &= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$



### Contoh Soal

#### Soal :

Nilai dari  $\sqrt{5050^2 - 4950^2}$

#### Pembahasan :

Perhatikan bahwa  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  maka

$$\begin{aligned}\sqrt{5050^2 - 4950^2} &= \sqrt{(5050 + 4950) \cdot (5050 - 4950)} \\&= \sqrt{(10000) \cdot (100)} \\&= \sqrt{1000000} = 1000\end{aligned}$$



### Contoh Soal

**Soal :**

Jika  $A = 5^x + 5^{-x}$  dan  $B = 5^x - 5^{-x}$  maka  $A^2 - B^2$  adalah

**Pembahasan :**

Diketahui

$$A = 5^x + 5^{-x}$$

$$B = 5^x - 5^{-x}$$

$$A + B = (5^x + 5^{-x}) + (5^x - 5^{-x}) = 2 \cdot 5^x$$

$$A - B = (5^x + 5^{-x}) - (5^x - 5^{-x}) = 2 \cdot 5^{-x}$$

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A + B)(A - B) \\ &= 2 \cdot 5^x \cdot 2 \cdot 5^{-x} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Jadi,  $A^2 - B^2 = 4$ .



## C. Latihan Soal

- Faktorkan bentuk-bentuk berikut:
  - $25x + 20y$
  - $2mn - 8m$
  - $15xy^2 + 10x^2y$
  - $6ab^2c^3 - 18a^3c^2$
  - $4xy^2z^3 + 6x^2y^3z^2 + 12x^3yz^2$
  - $4xy^2z^3 + 6x^2y^3z^2$
- Salah satu faktor dari  $17^3 - 5^3$  adalah .....
- Jika  $A = 5^x + 5^{-x}$  dan  $B = 5^x - 5^{-x}$  maka  $A^2 - B^2$  adalah .....
- Jika  $a^2 = 7b + 1945$  dan  $b^2 = 7a + 1945$  dengan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real berbeda, maka nilai dari  $ab$  adalah .....
- (Baltic Way 1999) Tentukan semua bilangan real  $a, b, c$  dan  $d$  yang memenuhi sistem persamaan berikut :
$$\begin{aligned}abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 1 \\bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 9 \\cda + cd + da + ac + c + d + a &= 9 \\dab + da + ab + bd + d + b + a &= 9\end{aligned}$$
- Canadian MO 1992) Selesaikan persamaan  $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$
- (AIME 1983)  $w$  dan  $z$  adalah bilangan kompleks yang memenuhi  $w^2 + z^2 = 7$  dan  $w^3 + z^3 = 10$ . Apakah nilai terbesar yang mungkin dari  $w + z$  ?
- Jika  $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ , maka nilai dari  $(1 + \frac{1}{x})^3$  adalah .....
- (Baltic Way 1999) Tentukan semua bilangan real  $a, b, c$  dan  $d$  yang memenuhi sistem persamaan berikut :
$$\begin{aligned}abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 1 \\bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 9 \\cda + cd + da + ac + c + d + a &= 9 \\dab + da + ab + bd + d + b + a &= 9\end{aligned}$$
- Canadian MO 1992) Selesaikan persamaan  $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

# BAB

# 2

# BARISAN, DERET, DAN FUNGSI

## SUBBAB

- Barisan Dan Deret
- Fungsi
- Latihan Soal

*Sequences,  
Series, And Functions*

## Dan Millman

Kemauan adalah kunci sukses. Orang-orang sukses, berusaha keras apa pun yang mereka rasakan dengan menerapkan keinginan mereka untuk mengatasi sikap apatis, keraguan atau ketakutan.

## A. Barisan Dan Deret

1,2,3,4,5,... Dikatakan sebagai **barisan** karena mempunyai pola tertentu dengan rumus suku ke-n adalah  $n$

$1+2+3+4+...$  Disebut sebagai **deret**

Barisan ada dua yaitu :

1. **Barisan aritmetika** adalah suatu barisan bilangan yang selisih atau bedanya tetap antara suku-suku yang berdekatan.

Pengertian, rumus suku ke-n dan rumus Jumlah  $n$  suku pertama

Barisan aritmatika adalah barisan yang setiap dua suku berurutan memiliki selisih yang konstan.  $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$  adalah barisan aritmatika dengan suku pertama  $= a$  dan beda  $= b$ .

2. **Barisan geometri** yaitu baris bilangan yang nilai suku ditentukan dari suku sebelumnya lewat perkalian suatu bilangan.

Pengertian, rumus suku ke-n dan rumus Jumlah  $n$  suku pertama

Barisan geometri adalah barisan yang setiap dua suku berurutan memiliki perbandingan yang konstan. Misalkan  $a, ar, ar^2, \dots$  adalah barisan geometri dengan suku pertama  $= a$  dan rasio  $= r$ .

### Rumus Barisan dan Deret Aritmatika

#### Rumus Barisan Aritmatika

$$U_n = a + (n - 1)b$$

#### Keterangan :

$a$  =  $U_1$  = Suku Pertama dalam barisan aritmatika

$b$  = beda barisan aritmatika  $= U_n - U_{n-1}$  dengan  $n$  adalah banyaknya suku

$n$  = jumlah suku

$U_n$  = Jumlah suku ke  $n$

#### Rumus Deret Aritmatika

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) \text{ atau } \frac{n}{2}(a + U_n)$$

#### Keterangan :

$a$  =  $U_1$  = suku pertama dalam barisan aritmatika.

$b$  = beda barisan aritmatika  $= U_n - U_{n-1}$  dengan  $n$  adalah banyaknya suku

$n$  = jumlah suku

$U_n$  = jumlah suku ke  $n$

$S_n$  = jumlah  $n$  suku pertama



### Rumus Umum

$$U_n = a \times r^{n-1}$$

#### Keterangan :

a =  $U_1$  = suku pertama dalam barisan aritmatika.

r = rasio

n = jumlah suku

$U_n$  = jumlah suku ke n

### Rumus Menentukan Nilai Baris Geometri

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

#### Keterangan :

$S_n$  = Jumlah n dari suku pertama.

$U_n$  = Nilai baris suku ke-n

$S(n-1)$  = jumlah n-1 dari suku pertama

### Rumus Menghitung Suku Tengah Geometri

$$U_t = \sqrt{a \times U_n}$$

#### Keterangan :

$U_t$  = Suku tengah

t = Posisi dari suku tengah

a = Suku pertama

$U_n$  = Suku ke-n

n = Banyaknya suku

### Contoh Soal :

#### Soal :

Berapa suku kesepuluh dari barisan 3,6,12,.....,....?

#### Pembahasan :

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 3 \times (2)^{10-1}$$

$$U_{10} = 3 \times (2)^9$$

$$U_{10} = 1536$$

## B. Fungsi

### 1. Fungsi Linear

- Fungsi  $y = f(x)$
- Memiliki satu variable
- Missal  $f(x) = 2x-1$

#### Contoh Soal

**Soal :**

Tentukan persamaan grafik fungsi linear melalui titik (2, 4) dengan gradien 2.

**Pembahasan:**

Diketahui titik (2, 4) maka  $x_1 = 2$  dan  $y_1 = 4$ . Gradien 2 maka  $m = 2$ .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

$$y - 4 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 4 + 4$$

$$y = 2x$$

Jadi, persamaan grafik fungsi linear adalah  $y = 2x$ .



### 2. Fungsi Kuadrat

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ 
  - a. Nilai x yang menyebabkan y maksimum =  $\frac{-b}{2a}$
  - b. Nilai y maks =  $\frac{-D}{2a}$ 
$$D = b^2 - 4ac$$
- $f(x) = x^2$ 
  - $a = 1, b = 0, c = 0$

#### Contoh Soal

**Soal :**

$f(x) = 4x^2 + 3x + 8$ . Hitunglah nilai  $a + 2b + 3c$  !

**Pembahasan :**

Diketahui nilai  $a = 4, b = 3, c = 8$

$$= a + 2b + 3c$$

$$= 4 + 2(3) + 3(8)$$

$$= 4 + 6 + 24$$

$$= 34$$



### 3. Fungsi Invers

$f(x) = y$  Invers  $f^{-1}(x)$  atau  $y^{-1}$

#### Contoh Soal

**Soal :**

Tentukan invers dari fungsi  $y = f(x) = 3x - 8$

**Pembahasan :**

Diketahui :

$$y = f(x) = 3x - 8$$

Ditanyakan :  $f^{-1}(x)$

Dijawab :

$$y = 3x - 8$$

$$x = \frac{y+8}{3}$$



### 4. Fungsi Komposisi

- Gabungan lebih dari satu fungsi
- Pemetaan terhadap fungsi  $f(x)$  yang dilanjutkan oleh fungsi  $g(x)$  ditulis sebagai  $(g(x) \circ f(x))$ .
- Didefinisikan  $(g(x) \circ f(x)) = g(f(x))$ .

#### Contoh Soal

**Soal :**

Diketahui  $f(x) = x + 7$  dan  $(f \circ g)(x) = 5x + 3$ . Tentukan  $g(x)$ .

**Pembahasan :**

$$f(g(x)) = g(x) + 7$$

$$5x + 3 = g(x) + 7$$

$$g(x) = 5x - 4$$



## C. Latihan Soal

1. Diketahui barisan 2, 5, 8, 11, ..... Tentukan suku ke-10 dan jumlah 4 suku pertama!
2. Sebuah barisan jumlah  $n$  buah suku pertama dirumuskan dengan  $S_n = 3n^2 - 15n$ , maka  $U_3 = \dots$
3. Nilai dari  $\sum_{k=1}^n (2k + 3)$
4. Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke ...
5. Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk barisan aritmatika. Jika sisi hipotenusa sama dengan 20, maka keliling segitiga tersebut adalah ...
6. Diketahui barisan 2, 6, 18, 54, ... . Tentukan suku ke-5 dan jumlah 4 suku pertama barisan tersebut.
7. Pada barisan geometri diketahui  $U_8 = 36$  dan  $S_7 = 52$ , maka  $S_8 = \dots$
8. Tiga bilangan membentuk deret geometri dengan jumlah 65. Jika suku ke-3 dikurangi 20 terbentuklah deret aritmatika, maka rasio barisan tersebut adalah...
9. Misal  $f$  adalah suatu fungsi yang memetakan dari bilangan bulat positif ke bilangan bulat positif dan didefinisikan dengan :  $f(ab) = b - f(a) + a - f(b)$ . Jika  $f(10) = 19$  ;  $f(12) = 52$  dan  $f(15) = 26$ . Tentukan nilai dari  $f(8)$ .
10. Jika  $g(x - 5) = 7x + 3$  maka tentukan  $g(x)$ .
11. Sebuah barisan jumlah  $n$  buah suku pertama dirumuskan dengan  $S_n = 3n^2 - 15n$ , maka  $U_3$
12. Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke
13. Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk barisan aritmatika. Jika sisi hipotenusa sama dengan 20, maka keliling segitiga tersebut adalah
14. Diketahui 3, ..., 13, 15, ... adalah barisan aritmatika. Tentukan suku tengah barisan tersebut.
15. Pada setiap dua bilangan berurutan dari barisan 2, 12, 22, 32, 42. .... disisipi sebanyak 4 bilangan. Tentukan suku ke-100 dari barisan yang baru.

# BAB

# 3

# PERSAMAAN LINEAR

## SUBBAB

- Linear Satu Variabel
- Linear Dua Variabel
- Linear Tiga Variabel
- Latihan Soal

*Linear Equation*

## Buya Hamka

Iman tanpa ilmu bagaikan lentera di tangan bayi. Namun ilmu tanpa iman bagaikan lentera di tangan pencuri.

## ❖ Pengertian

**Persamaan linear** adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan ini dikatakan linear sebab hubungan matematis ini dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam Sistem koordinat Kartesius.

### a. Sifat-sifat Persamaan Linear

- 1) Nilai persamaan tidak berubah jika memenuhi syarat-syarat berikut
  - a. Kedua ruas di tambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama.
  - b. Kedua ruas dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.
- 2) Suatu persamaan jika dipindah ruas, maka:
  - a. Penjumlahan berubah menjadi pengurangan dan sebaliknya
  - b. Perkalian berubah menjadi pembagian dan sebaliknya

## A. Persamaan Linear Satu Variabel

Persamaan linear satu variable adalah persamaan berbentuk  $ax + b = 0$

Dengan  $a, b \in \mathbb{R}$  dan  $a \neq 0$ , dan

$x$  : variabel real

$a$  : koefisien  $x$

$b$  : konstanta

### Contoh Soal

**Soal :** Berapa nilai  $n$  dari  $3n + 3 = 24$ ?

**Pembahasan :**

$$3n + 3 = 24$$

$$3n = 24 - 3$$

$$3n = 21$$

$$n = \frac{21}{3}$$

$$n = 7$$



## B. Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan berbentuk  $ax + by + c = 0$

Dengan  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dan  $a$  dan  $b$  tidak keduanya nol, dimana

$x$  : variabel real

$a$  : koefisien  $x$

$b$  : konstanta

Metode untuk menyelesaikan soal sistem persamaan linear dua variabel.

### 1. Metode eliminasi

Yaitu metode penyelesaian dengan cara menghilangkan salah satu variabel dari sistem persamaan tersebut

### 2. Metode substitusi

Yaitu metode penyelesaian dengan cara menyatakan dua variabel dalam variabel yang lain, kemudian mengganti variabel tersebut dalam persamaan yang lainnya.

### 3. Metode eliminasi-substitusi

Yaitu metode penyelesaian dengan cara menghilangkan salah satu variabel dari sistem persamaan tersebut

**Misalkan**  $a, b$ , dan  $c$  bilangan real dan  $a, b$  keduanya tidak nol. Himpunan penyelesaian persamaan linear  $ax + by = c$  adalah himpunan semua pasangan  $(x, y)$  yang memenuhi persamaan linear tersebut.

### Contoh Soal

**Soal :** Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan  $2x + 3y = 6$  dan  $x - y = 3$  adalah

**Pembahasan :**

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 6 & | \times 1 | & \\ x - y = 3 & | \times 3 | & \\ \hline 2x + 3y = 6 & & \\ 3x - 3y = 9 & & \\ \hline 5x & = & 15 \\ x & = & 3 \end{array} \quad +$$



**Contoh Soal :**

Tentukan nilai  $x$  dan  $y$  dari persamaan berikut:

$$x + 4y = 6$$

$$2x + 5y = 15$$

Penyelesaian:

- Metode Eliminasi**

$$x + 4y = 6 \dots\dots(1)$$

$$2x + 5y = 15 \dots\dots(2)$$

$$\text{Pers. (1) dikali 2} \Rightarrow 2x + 8y = 12 \dots\dots(3)$$

$$\text{Pers. (2)} - (3) \Rightarrow 2x + 5y = 15$$

$$\begin{array}{r} 2x + 8y = 12 \\ \hline 2x + 5y = 15 \\ \hline -3y = 3 \\ y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow x + 4y = 6 \quad \left| \begin{array}{l} \times 5 \\ \times 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 5x + 20y = 30 \\ 8x + 20y = 60 \end{array} \\ \hline \phantom{\text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow} 2x + 5y = 15 \quad \left| \begin{array}{l} \times 5 \\ \times 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 10x + 25y = 75 \\ 8x + 20y = 60 \end{array} \\ \hline \phantom{\text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow} \phantom{2x + 5y = 15} -3x = -30 \\ \phantom{\text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow} \phantom{2x + 5y = 15} x = 10 \end{array}$$

- Metode Substitusi**

$$x + 4y = 6 \dots\dots(1)$$

$$2x + 5y = 15 \dots\dots(2)$$

Substitusikan  $x = -4y + 6$  ke pers. (2)

$$2(-4y + 6) + 5y = 15$$

$$-8y + 12 + 5y = 15$$

$$-3y = 3$$

$$y = -1$$

Substitusi  $y = -1$  ke pers. (1)

$$x + 4(-1) = 6$$

$$x - 4 = 6$$

$$x = 10$$

- Metode Eliminasi dan Substitusi**

$$\begin{array}{r} \text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow x + 4y = 6 \quad \left| \begin{array}{l} \times 5 \\ \times 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 5x + 20y = 30 \\ 8x + 20y = 60 \end{array} \\ \hline \phantom{\text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow} 2x + 5y = 15 \quad \left| \begin{array}{l} \times 5 \\ \times 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 10x + 25y = 75 \\ 8x + 20y = 60 \end{array} \\ \hline \phantom{\text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow} \phantom{2x + 5y = 15} -3x = -30 \\ \phantom{\text{Pers. (1)} - (2) \Rightarrow} \phantom{2x + 5y = 15} x = 10 \end{array}$$

Substitusi  $x = 10$  ke pers. (1)

$$10 + 4y = 6$$

$$4y = 6 - 10$$

$$4y = -4$$

$$y = -1$$

Jadi, nilai  $x = 10$  dan  $y = -1$

## C. Persamaan Linear Tiga Variabel

**Sistem persamaan linear tiga variabel** adalah kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda “=” dan mempunyai tiga variabel berpangkat satu. Bentuk umum persamaan linear tiga variabel sebagai berikut:

$ax + by + cz + d = 0$ , dimana  $a, b, c, d \in R$  dan  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  dan  $x, y, z =$  variabel/peubah.

Sistem persamaan linear tiga variabel dapat diselesaikan dengan 4 cara:

1. Metode Substitusi
2. Metode Eliminasi
3. Metode Substitusi dan Eliminasi
4. Metode Determinan

### Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut!

$$x - y + z = 6$$

$$x + 2y - z = -3$$

$$2x + y + z = 6$$

Penyelesaian:

#### • Metode Substitusi dan Eliminasi

$$x - y + z = 6 \quad \dots(1)$$

$$x + 2y - z = -3 \quad \dots(2)$$

$$2x + y + z = 6 \quad \dots(3)$$

$$\text{Pers. (1) + (2)} \Rightarrow x - y + z = 6$$

$$\begin{array}{r} x + 2y - z = -3 \\ \hline 2x + y = 3 \end{array} \quad \dots\dots(4)$$

$$\text{Pers. (2) + (3)} \Rightarrow x + 2y - z = -3$$

$$\begin{array}{r} 2x + y + z = 6 \\ \hline 3x + 3y = 3 \end{array} \quad \dots\dots(5)$$

$$\text{Pers. (4) - (5)}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2x + y = 3 & \times 3 & 6x + 3y = 9 \\ 3x + 3y = 3 & \times 1 & 3x + 3y = 3 \\ \hline & & 3x = 6 \\ & & x = 2 \end{array}$$

Substitusi  $x = 2$  ke pers. (5)

$$3(2) + 3y = 3$$

$$6 + 3y = 3$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

Substitusi  $x = 2, y = -1$  ke pers. (1)

$$2 - (-1) + z = 6$$

$$3 + z = 6$$

$$z = 3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah  $x = 2, y = -1$  dan  $z = 3$ .

- **Metode Determinan**

$$x - y + z = 6$$

$$x + 2y - z = -3$$

$$2x + y + z = 6$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 + 2 + 1) - (-1 - 1 + 4) \\ &= 5 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (12 + 6 - 3) - (3 - 6 + 12) \\ &= 15 - 9 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (-3 - 12 + 6) - (6 - 6 - 6) \\ &= -9 + 6 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_z &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (12 + 6 + 6) - (-6 - 3 + 24) \\
 &= 24 - 15 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{9}{3} = 3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah  $x = 2$ ,  $y = -1$  dan  $z = 3$ .

## D. Latihan Soal

1. Penyelesaian dari persamaan  $4y + 2 = 3y + 5$
2. Penyelesaian dari  $2x + 10 = 11$  adalah ...
3. Penyelesaian dari  $5(x - 2) = 3(x + 4)$  adalah ...
4. Penyelesaian dari persamaan  $4(1 - x) + 3(x + 5) = 8$  adalah ...
5. Nilai  $x$  dan  $y$  yang memenuhi sistem persamaan  $x + 2y = 4$  dan  $x - y = 1$  adalah ...
6. Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan  $2x + 3y = 6$  dan  $x - y = 3$  adalah ...
7. Carilah penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode eliminasi!
  - a.  $x - y = 8$  dan  $x + y = 2$
  - b.  $3x - 2y = 10$  dan  $4x - 3y = 15$
8. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini dengan metode gabungan (eliminasi-substitusi)!
  - a.  $2x + y = 5$  dengan  $3x + 2y = 8$
  - b.  $3x + 5y = 21$  dengan  $2x - 3y = -5$
9. Diketahui sistem persamaan linear
10. Diberikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x - y - z &= -5 \\ 2x - 2y - z &= 7 \end{cases}$$

Nilai  $x$  adalah...

11. Bilangan 43 dapat dinyatakan ke dalam bentuk  $5a + 11b$  karena untuk  $a = 13$  dan  $b = -2$ , nilai dari  $5a + 11b$  adalah 43. Manakah dari tiga bilangan 37, 254, dan 1986 yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk  $5a + 11b$
12. Jika bilangan bulat  $x$  dan  $y$  dibagi 4, maka bersisa 3. Jika bilangan  $x - 3y$  dibagi 4, maka bersisa....

# BAB

# 4

# STATISTIKA

## SUBBAB

- Mean
- Median
- Modus
- Latihan Soal

*Statistics*

## Buya Hamka

Cinta bukan melemahkan hati, bukan membawa putus asa, bukan menimbulkan tangis sedu sedan. Tetapi cinta menghidupkan pengharapan, menguatkan hati dalam perjuangan menempuh onak dan duri penghidupan.

### ❖ Pengertian

Statistik adalah suatu ilmu yang mempelajari tentang cara mengumpulkan, mengolah, menjelaskan, meringkas, menyajikan, dan menginterpretasikan data yang digunakan sebagai dasar pengambilan keputusan.

## A. Rataan Aritmetik (Arithmetic Mean)

Untuk data tunggal

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Metode singkat :

$$\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$$

A = rataan sementara atau sebarang nilai x

d = selisih tiap nilai dengan rataan sementara

### Contoh Soal :

#### Soal :

Nilai ulangan Matematika kelas VI

6, 8, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 8, 7, 7, 6, 7, 9, 7, 7, 7,  
9, 6, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 8, 9, 9, 6, 6, 10, 9, 8, 8, 7, 9, 9

Nilai rata-rata dari data di atas adalah ....

#### Pembahasan :

Kita hitung dulu total nilai.

$$6 \times 9 = 54$$

$$7 \times 13 = 91$$

$$8 \times 8 = 64$$

$$9 \times 9 = 81$$

$$10 \times 1 = 10$$

$$\text{Total nilai} = 300$$

$$\text{Jumlah siswa} = 40$$

$$\text{Rata-rata} = \text{Jumlah nilai} : \text{banyaknya siswa}$$

$$\text{Rata-rata} = 300 : 40$$

$$\text{Rata-rata} = 7,5$$

Jadi rata-rata nilai ulangan matematika adalah 7,5



## B. Median (Nilai Tengah)

$Md = \text{data ke } \left(\frac{n+1}{2}\right) \rightarrow \text{untuk data ganjil}$

$Md = \frac{\text{data ke } \left(\frac{n}{2}\right) + \text{data ke } \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2} \rightarrow \text{untuk data genap}$

\*untuk menentukan median, kamu harus mengurutkan data terlebih dahulu.

### Contoh Soal :

#### Soal :

Data hasil ulangan Matematika kelas VI

|              |   |   |    |   |   |    |
|--------------|---|---|----|---|---|----|
| Nilai        | 5 | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
| Jumlah Siswa | 4 | 6 | 12 | 7 | 6 | 5  |

Median dari data di atas adalah ....

#### Pembahasan :

median dari data di atas adalah ....

Untuk mencari median, urutkan data dari yang terkecil seperti berikut.

~~5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10~~

Banyak data = 40

Karena banyak data genap, maka nilai median sama dengan jumlah kedua data yang berada di tengah dibagi dua. Yang tidak dicoret adalah mediannya.

Median = (nilai data ke-19 + nilai data ke-20) : 2

Median = (7 + 7) : 2

Median = 7

Jadi, median = 7



## C. Modus (Mode)

Modus menunjukkan nilai dalam sebaran data yang paling sering muncul.

$$Mo = Tb + \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) p$$

Tb : tepi bawah dari modus

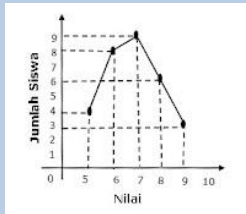
$d_1$  : selisih antara frekuensi kelas modus dengan frekuensi dari sebelum kelas modus

$d_2$  : selisih antara frekuensi kelas modus dengan setelah kelas modus

p : Panjang dari kelas interval

### Contoh Soal :

#### Soal :



Modus dari diagram di atas adalah ....

#### Pembahasan :

Pada diagram, nilai 7 grafiknya tertinggi yaitu di angka 9  
Jadi, modusnya adalah 7



## D. Latihan Soal

1. Senin kemarin, Pak Hasan mendata tinggi badan siswa kelas V SD Negeri Jaya. Hasil yang didapat termuat dalam tabel di bawah ini:

| Tinggi Badan Siswa | Titik Tengah ( $x_n$ ) | Frekuensi ( $f_n$ ) | $x_n \cdot f_n$ |
|--------------------|------------------------|---------------------|-----------------|
| 156 cm – 160 cm    | 158 cm                 | 6                   | 948             |
| 161 cm – 165 cm    | 163 cm                 | 10                  | 1630            |
| 166 cm – 170 cm    | 168 cm                 | 8                   | 1344            |
| 171 cm – 175 cm    | 173 cm                 | 4                   | 692             |

Dari data tersebut, hitung nilai mean!

2. Setelah melakukan penelitian sederhana, Naya berhasil memperoleh data dengan urutan sebagai berikut 89,89,89,89,90,90,91,91,92,93,93,94,94,96,96,98,98,100.

Hitung mean data tersebut!

3. Diketahui bahwa Desa Makmur berhasil panen ikan mujair.  
Data hasil panen ikan mujair Desa Makmur sebagai berikut:

| Hasil Panen    | Frekuensi Panen |
|----------------|-----------------|
| 90 – 150 ikan  | 10              |
| 151 – 250 ikan | 14              |
| 251 – 380 ikan | 11              |
| 381 – 550 ikan | 12              |
| 551 – 900 ikan | 20              |
| 901 - 1500     | 18              |

Tentukan modus dari hasil panen mujair tersebut!

4. Diketahui suatu data sebagai berikut.

2, 3, 3, 6, 8, 1, 3,4,7,4

Mean dari data pada soal nomor 2 adalah.....

5. Nilai ulangan bahasa Jawa ada pada tabel di bawah ini:

| Nilai Ulangan | Frekuensi | $f_n \cdot x_n$ |
|---------------|-----------|-----------------|
| 5             | 7         | 35              |
| 6             | 9         | 54              |
| 7             | 15        | 105             |
| 8             | 11        | 88              |
| 9             | 10        | 90              |
| 10            | 4         | 40              |

Cari tahu jumlah siswa yang berhasil mendapatkan nilai di atas rata-rata kelas pada ulangan bahasa Jawa!

6. Diketahui hasil nilai matematika Kiara, Danar, dan Jeje masing-masing 8, 6, dan 10.  
Berapa nilai mean dari nilai matematika ketiganya?
7. Tentukan nilai mean dari data berikut ini!  
7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10
8. Diketahui sebuah data adalah sebagai berikut:  
3, 5, 2, 7, 9, 1, 7, 5, 3, 8, 10, 12, 5  
Berapa nilai median dari data di atas?
9. Diketahui sebuah data tunggal  
2, 4, 6, 7, 7, 8, 9, 10. Berapakah modulusnya?
10. Berapa modus dari data dalam tabel ini?

|           |   |   |   |   |    |
|-----------|---|---|---|---|----|
| Nilai     | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Frekuensi | 3 | 7 | 5 | 8 | 2  |

# BAB

# 5

## TEORI BILANGAN

### SUBBAB

- Sifat Penjumlahan dan Perkalian
- Sifat-Sifat Keterbagian
- Uji Habis Dibagi
- FPB & KPK
- Banyaknya Faktor Positif
- Kekongruenan
- Fungsi Tangga dan Ceiling
- Pembagian Bersisa
- Latihan Soal

*Theory Number*

### Arianna Huffington

Kita harus menerima bahwa kita tidak akan selalu membuat keputusan yang tepat, bahwa kita kadang-kadang akan mengacaukannya – memahami bahwa kegagalan bukanlah lawan dari kesuksesan, itu adalah bagian dari kesuksesan.

## ❖ Pengertian

Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang ditujukan terutama untuk mempelajari bilangan bulat dan fungsi bernilai bilangan bulat itu sendiri. Teori bilangan memiliki empat konsep operasi hitung antara lain : Penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Dalam teori bilangan kali ini memuat :

### A. Sifat penjumlahan dan perkalian

#### Aturan Perkalian Tanda:

1. Positif x Positif = Positif
2. Positif x Negatif = Negatif
3. Negatif x Positif = Negatif
4. Negatif x Negatif = Positif

#### Sifat-sifat dalam penjumlahan dua bilangan adalah :

1. Bilangan Ganjil  $\pm$  Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
2. Bilangan Ganjil  $\pm$  Bilangan Genap = Bilangan Ganjil
3. Bilangan Genap  $\pm$  Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
4. Bilangan Genap  $\pm$  Bilangan Genap = Bilangan Genap

#### Sifat-sifat dalam perkalian dua bilangan adalah :

1. Bilangan Ganjil x Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
2. Bilangan Ganjil x Bilangan Genap = Bilangan Genap
3. Bilangan Genap x Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
4. Bilangan Genap x Bilangan Genap = Bilangan Genap

### B. Sifat-sifat Keterbagian

Definisi : Sebuah bilangan bulat  $a$  dikatakan membagi  $b$  jika terdapat bilangan bulat  $k$  sehingga  $b = a \cdot k$ .

Beberapa hal berkaitan dengan pembagian adalah sebagai berikut :

1.1 Misalkan  $a, b, c, x$  dan  $y$  bilangan bulat, maka sifat-sifat di bawah ini berlaku :

- (1)  $a \mid a$  (semua bilangan bulat membagi dirinya sendiri)
- (2)  $a \mid 0$  (semua bilangan bulat membagi 0)
- (3)  $1 \mid a$  (satu membagi semua bilangan bulat)

- (4) Jika  $a \mid 1$  maka  $a = \pm 1$
  - (5) Jika  $a \mid b$  maka  $a \mid xb$
  - (6) Jika  $a \mid b$  dan  $b \mid c$  maka  $a \mid c$
  - (7) Jika  $a \mid b$  dan  $a \mid c$  maka  $a \mid (bx + cy)$
  - (8) Jika  $a \mid b$  maka  $xa \mid xb$
  - (9) Jika  $a \mid b$  dan  $b \neq 0$  maka  $|a| \leq |b|$
  - (10) Jika  $a \mid b$  dan  $b \mid a$  maka  $a = \pm b$
  - (11) Jika  $ab = c$  maka  $a \mid c$
  - (12) Jika  $a \mid bc$  dan  $\text{FPB}(a, b) = 1$  maka  $a \mid c$
  - (13)  $0 \mid a$  hanya jika  $a = 0$
- 1.2 Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) dua bilangan tersebut sama dengan 1. Jika suatu bilangan habis dibagi  $a$  dan juga habis dibagi  $b$ , maka bilangan tersebut akan habis dibagi  $ab$  dengan syarat  $a$  dan  $b$  relatif prima. Berlaku sebaliknya.
- 1.3 Bilangan yang dapat diubah menjadi perkalian  $n$  bilangan bulat berurutan akan habis dibagi  $n!$  dengan tanda “!” menyatakan faktorial.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .
- 1.4 Mengingat penjabaran pada dua persamaan berikut :
- (i)  $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$  dengan  $n \in \text{bilangan asli}$
  - (ii)  $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$  dengan  $n \in \text{bilangan ganjil}$
- Maka  $(a - b)$  membagi  $(a^n - b^n)$  untuk semua  $a, b$  bulat dan  $n$  bilangan asli  
 $(a + b)$  membagi  $(a^n + b^n)$  untuk semua  $a, b$  bulat dan  $n$  bilangan ganjil

## C. Uji Habis dibagi

Sebuah bilangan memiliki sifat khusus jika dibagi oleh suatu bilangan tertentu. Beberapa sifat tersebut adalah :

- a. Suatu bilangan habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir dari bilangan tersebut adalah 0 atau 5.
- b. Suatu bilangan habis dibagi  $2^n$  jika dan hanya jika  $n$  digit terakhir dari bilangan tersebut habis dibagi  $2^n$ .
- c. Suatu bilangan habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 3.
- d. Suatu bilangan habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis

dibagi 9.

- e. Suatu bilangan habis dibagi 11 jika dan hanya jika selisih antara jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi ganjil dengan jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi genap habis dibagi 11.

## D. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dan Persekutuan Terkecil (KPK)

### Pengertian :

- FPB (a, b) adalah bilangan asli terbesar d sehingga  $d|a$ ,  $d|b$  dan untuk setiap bilangan bilangan asli  $e \neq d$  dimana  $d|a$  dan  $d|b$ , maka  $e < d$ .
- KPK (a,b) adalah bilangan asli terkecil m sehingga  $a|m$ ,  $b|m$  dan untuk setiap bilangan asli  $n \neq m$  dimana  $a|n$  dan  $b|n$ , maka  $m < n$ .

Misalkan M dan N adalah dua bilangan asli, maka M dan N dapat dinyatakan sebagai berikut  $M = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$  dan  $N = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot p_3^{b_3} \dots p_n^{b_n}$

Dengan  $p_i$  adalah faktor prima dari M dan N, sedangkan  $a_i$  dan  $b_i$  adalah bilangan cacah, untuk setiap  $i=1,2,\dots,n$ .

Faktor Persekutuan Terbesar dari M dan N ditulis **FPB** (M, N) =  $p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot p_3^{c_3} \dots p_n^{c_n}$

Kelipatan Persekutuan Terkecil dari M dan N ditulis **KPK** (M, N) =  $p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot p_3^{d_3} \dots p_n^{d_n}$

Dengan

$$c_1 = \min(a_1, b_1); c_2 = \min(a_2, b_2); c_3 = \min(a_3, b_3); \dots; c_n = \min(a_n, b_n)$$

$$d_1 = \max(a_1, b_1); d_2 = \max(a_2, b_2); d_3 = \max(a_3, b_3); \dots; d_n = \max(a_n, b_n)$$

Beberapa hal berkaitan dengan FPB adalah :

- FPB(0,0) = 0
- FPB(a, 0) = |a|
- FPB (a, b) = FPB (|a|, |b|)
- FPB (a,b) = FPB(b,a)
- Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan asli berurutan adalah 1.
- Jika  $d = \text{FPB}(a, b)$  maka  $d|a$  dan  $d|b$
- Misalkan  $a = mp$  dan  $b = mq$  maka  $\text{FPB}(a, b) = m \cdot \text{FPB}(p, q)$
- Jika  $a \neq 0$  dan  $b \neq 0$  maka  $0 \leq \text{FPB}(a,b) \leq \min$
- Misalkan  $a > b > 0$  dan  $a = bq + r$  untuk bilangan asli a, b, p dan r maka  $\text{FPB}(a,b) = \text{FPB}(b,r)$

- j. Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) sama dengan 1.
- k. Bezout's Lemma : Untuk setiap bilangan bulat  $a$  dan  $b$  terdapat bilangan bulat  $x$  dan  $y$  yang memenuhi  $ax + by = \text{FPB}(a, b)$

### Pengertian Relatif Prima (*Relative Prime*)

Dua buah bilangan bulat  $a$  dan  $b$  disebut saling prima (*relative prime*) jika  $\text{gcd}(a, b) = 1$ .

Sifat:

Jika  $a$  dan  $b$  dua buah bilangan bulat dan  $d = \text{gcd}(a, b)$ , maka terdapat bilangan bulat  $m$  dan  $n$  sehingga  $d = ma + nb$ .

#### Contoh Soal FPB :

**Soal :**

FPB dari 39, 52, dan 78 adalah...

**Pembahasan:**

Pertama-tama kita cari dulu faktorisasi prima dari 39, 52, dan 78

$$39 = 3 \times 13$$

$$52 = 2^2 \times 13$$

$$78 = 2 \times 3 \times 13$$

$$\text{FPB} = 13$$



#### Contoh Soal KPK :

**Soal :**

KPK dari 42, 63, dan 84 adalah...

**Pembahasan:**

Faktorisasi prima dari 42, 63, dan 84 adalah :

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$63 = 3^2 \times 7$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\text{KPK} = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

$$= 4 \times 9 \times 7$$

$$= 36 \times 7$$

$$= 252$$



### Contoh Soal Faktorisasi Prima :

#### Soal :

Contoh : Faktorisasi prima dari 2744 yaitu....

#### Pembahasan :

Jawab :

$$\begin{aligned} 2744 &= 2 \times 1372 \\ &= 2 \times 2 \times 686 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 343 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 49 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \\ &= 2^3 \times 7^3 \end{aligned}$$



Jadi, Faktorisasi prima dari 2744 yaitu  $= 2^3 \times 7^3$

## E. Banyaknya Faktor Positif

Misalkan  $M = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$  untuk bilangan asli  $M$  serta  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  semuanya adalah bilangan prima maka :

Banyaknya faktor positif dari  $M$  adalah  $(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_n + 1)$

## F. Kekongruenan

Konsep kekongruenan bilangan dikembangkan berdasarkan konsep bahwa setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan ke dalam bentuk  $N = pq + r$  atau  $N - r = pq$  dengan  $p, q, r$  adalah bilangan bulat dan  $r$  berada pada  $0$

$\leq r < p$ . Persamaan  $N = pq + r$  dengan  $p$  menyatakan pembagi,  $q$  menyatakan hasil bagi dan  $r$  menyatakan sisa. Persamaan di atas sering pula ditulis  $N \equiv r \pmod{p}$

Beberapa sifat berkaitan dengan Buku Ajaru adalah sebagai berikut. Misalkan  $a, b, c, d$  dan  $m$  adalah bilangan-bilangan bulat dengan  $d > 0$  dan  $m > 0$ , berlaku :

### Kamu Harus Tahu !!!

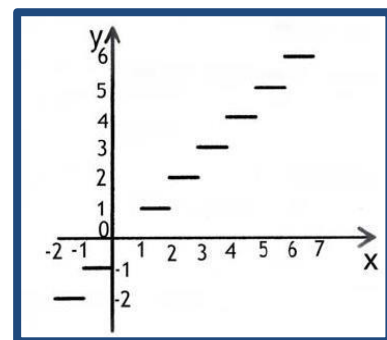
- (i)  $a \equiv a \pmod{m}$
- (ii) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$ , maka  $b \equiv a \pmod{m}$
- (iii) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $b \equiv c \pmod{m}$  maka  $a \equiv c \pmod{m}$
- (iv) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $d|m$  maka  $a \equiv b \pmod{d}$
- (v) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  maka  $a^k \equiv b^k \pmod{m}$  untuk semua  $k$  bilangan asli
- (vi) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  maka  $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$
- (vii) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $c \equiv d \pmod{m}$  maka  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- (viii) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $c \equiv d \pmod{m}$  maka  $ac \equiv bd \pmod{m}$
- (ix)  $(am + b)k \equiv bk \pmod{m}$  untuk semua  $k$  bilangan asli
- (x) Dari sifat (viii) didapat  $(am + b)k \equiv (cm + d)n \equiv bk \equiv dn \pmod{m}$  untuk semua  $k$  dan  $n$  bilangan asli
- (xi) Jika  $ca \equiv cb \pmod{m}$  dan  $\text{FPB}(c, m) = 1$  maka  $a \equiv b \pmod{m}$
- (xii) Misalkan  $n \in \mathbb{N}$  dan  $S(n)$  adalah penjumlahan digit-digit dari  $n$  maka berlaku  $n \equiv S(n) \pmod{9}$ .
- (xiii)  $n5 \equiv n \pmod{10}$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ .



## G. Fungsi Tangga dan Ceiling

Perhatikan fungsi  $y = f(x) = \lfloor x \rfloor$  dengan tanda  $\lfloor \alpha \rfloor$  menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan  $\alpha$ .

Jika fungsi tersebut digambarkan dalam koordinat kartesian maka :



Selain itu ada juga yang disebut fungsi ceiling yang merupakan kebalikan dari fungsi tangga. Perhatikan fungsi  $y = f(x) = \lceil x \rceil$  dengan tanda  $\lceil \alpha \rceil$  menyatakan bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan  $\alpha$ .

Dari pengertian tersebut akan didapatkan

- i.  $(x - 1) < \lfloor x \rfloor \leq x$
- ii.  $\lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil$ .

Tanda kesamaan terjadi hanya saat  $x$  adalah bilangan bulat.

## H. Pembagian bersisa

Jika  $a \neq 0$ ,  $b$  merupakan bilangan bulat, kita katakan bahwa  $a$  membagi  $b$  jika ada bilangan bulat  $c$  sedemikian sehingga  $ac = b$ . ditulis dengan  $a \mid b$ .

Misalkan  $a, b$  bilangan bulat,  $b > 0$ . Ada bilangan bulat unik  $q$  dan  $r$  sehingga

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

Penjelasan:

$a$  disebut yang dibagi (*dividend*)

$b$  disebut pembagi (*divisor*)

$q$  disebut hasil bagi (*quotient*)

$r$  disebut sisa (*remainder*)

### Contoh Soal :

#### Soal :

Tentukan hasil pembagian 947 oleh 4.

#### Pembahasan :

947 jika dibagi 4 memberikan hasil bagi 16 dan sisa 3. Jadi, kita dapat menuliskan bahwa:

$$947 = 4 \cdot 16 + 3$$



### Contoh Soal :

#### Soal :

Tentukan hasil pembagian  $-22$  oleh 3.

#### Pembahasan :

Ingatlah bahwa sisa pembagian tidak boleh negatif, jadi kita tidak dapat menuliskan:

$$-22 = 3 \cdot (-8) + 2$$

Sebaliknya, jika  $-22$  dibagi dengan 3, maka kita dapat menuliskan:

$$-22 = 3 \cdot (-8) + 2$$

Karena  $r = 2$  memenuhi syarat  $0 \leq r < b$

