

ANALISIS REAL

ANALISIS REAL

Wahidah Alwi



ANALISIS REAL

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:
Wahidah Alwi

Editor: Erik Santoso

Cetakan Pertama : Desember 2021

Cover: Rusli

Tata Letak : Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2021, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2021 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2021
; 14,8 x 21 cm
ISBN : 978-623-5847-51-1

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kita haturkan kehadirat Allah Swt yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya kepada kita semua sehingga dapat menjalankan aktivitas sehari-hari dan khususnya kepada penulis yang selalu diberi kelancaran untuk menyelesaikan penulisan Buku Analisis Real ini.

Dengan keberadaan buku ini, diharapkan dapat membantu para mahasiswa untuk lebih mudah memahami konsep-konsep Analisis Real. Buku ini disajikan kepada pembaca yang telah mempelajari kalkulus, teori himpunan, dan barisan elementer.

Matematika Perguruan Tinggi lebih menekankan pada pembentukan pola pikir matematika yaitu logis, kritis, dan tegas. Jadi bukan lagi untuk mengasah kemampuan berhitung semata atau kemampuan menerapkan konsep ke dalam pemecahan masalah. Mahasiswa diharapkan dapat mengasah pola pikirnya melalui ketekunan dalam mempelajari langkah demi langkah berbagai aksioma, definisi, lemma, maupun teorema-teorema yang berkaitan dengan bilangan real.

Analisis real adalah suatu cabang matematika yang merupakan dasar di dalam matematika untuk berfikir formal yaitu berfikir secara deduktif aksiomatik.

Buku ini di tulis berdasarkan pada pengalaman penulis mengajar mata kuliah Analisis Real pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar, yang kemudian dilengkapi dengan beberapa bab dan tambahan beberapa definsi dan teorema sehingga terbentuk tulisan dalam bentuk buku. Selain itu penulis merasa bahwa buku yang membahas Analisis Real hingga saat ini masih cukup langkah, khususnya buku-buku yang berbahasa Indonesia.

Dalam buku ini dibahas konsep-konsep dari Analisis Real yang diharapkan agar pembaca dapat memulai berfikir secara deduktif aksiomatik, dalam mempelajari materi-materi yang lebih abstrak.

Buku ini membahas tentang sistem bilangan real, barisan bilangan real, limit fungsi dan kekontinuan di $\mathbb{R}$, turunan fungsi, Integral Riemann, topologi diruang cartesius, dan ruang metrik. Selanjutnya buku yang dihasilkan ini digunakan untuk perkuliahan di Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika UIN Alauddin Makassar, karena adanya keterbatasan referensi.

Penulis menyadari bahwa buku edisi sebelumnya masih ada beberapa kekurangan, oleh karena itu buku edisi revisi ini diterbitkan untuk melengkapi kekurangan-kekurangan pada edisi sebelumnya, untuk itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca demi penyempurnaan buku ini dalam edisi yang akan datang.

Akhirnya penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi, penulis, pembaca dan perkembangan ilmu pengetahuan secara umum. Amiiin.

Makassar, Juli 2020

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR.....	vi
BAB I SISTEM BILANGAN REAL.....	1
A. Aljabar pada Bilangan Real.....	1
B. Sifat Urutan pada $\mathbb{R}$	5
1. Ketaksamaan (Inequalities)	11
2. Nilai Mutlak dan Garis Bilangan Real	13
3. Garis Bilangan Real (<i>The Real Line</i>)	16
C. Kelengkapan pada $\mathbb{R}$	17
D. Sifat Archimedes pada $\mathbb{R}$	24
 BAB II BARISAN BILANGAN REAL.....	 29
A. Barisan dan Limit Barisan.....	29
B. Teorema-teorema Limit.....	38
C. Barisan Monoton.....	45
D. Barisan Bagian	48
E. Barisan Cauchy	55
F. Sifat Barisan Divergen	58
G. Deret Tak Berhingga	60
 BAB III LIMIT DAN KEKONTINUAN DI $\mathbb{R}$	 69
A. Limit fungsi di suatu titik	69
B. Perluasan Konsep Limit.....	76
C. Fungsi Kontinu di Suatu titik	80
D. Fungsi Kontinu Pada Interval.....	82
E. Lebih Jauh Tentang Fungsi Kontinu Pada Interval	85
F. Kombinasi Fungsi Kontinu	87
G. Kekontinuan Seragam dan Fungsi invers	89

BAB IV TURUNAN FUNGSI	95
A. Pengertian Turunan.....	95
B. Sifat-sifat Aljabar Turunan Fungsi.....	97
C. Turunan fungsi Invers	104
D. Turunan Tingkat Tinggi	110
E. Teorema Nilai Rata-rata.....	112
1. Maksimum dan Minimum Lokal	112
2. Titik Stasioner.....	113
3. Teorema Nilai Rata-rata dan Teorema Taylor.....	114
4. Aplikasi Teorema Nilai Rata-rata.....	116
5. Ketaksamaan	118
6. Sifat Nilai Antara dari Suatu Turunan	120
F. Aturan L'Hopital.....	121
 BAB V INTEGRAL RIEMANN.....	129
A. Konsep Partisi	129
B. Jumlah Riemann	130
C. Integral Riemann	131
D. Sifat-sifat Dasar Integral Riemann.....	135
E. Keintegralan Fungsi Kontinu dan Fungsi Monoton....	138
F. Teorema Dasar Kalkulus Untuk Integral Riemann	139
G. Teorema Nilai Rata-rata dan Teorema Taylor Untuk Integral.....	143
 BAB VI TOPOLOGI DI RUANG KARTESIUS.....	147
A. Interval dalam $\mathbb{R}$	147
B. Himpunan Terbuka	152
C. Himpunan Tertutup	156
D. Sekitar (<i>Neighbourhood</i>).....	158
E. Sel-sel Tertumpuk (<i>Nested Cell</i>).....	161
F. Titik Kumpul.....	163
G. Teorema Bolzano-Weierstrass dan Heine-Borel	165

H. Himpunan Terhubung	170
BAB VII RUANG METRIK.....	175
A. Pengertian Ruang Metrik	175
B. Limit di Ruang Metrik.....	185
C. Kekontinuan di Ruang Metrik	186
1. Fungsi Kontinu di Ruang Metrik	186
2. Himpunan Buka dan Himpunan Tutup di Ruang Metrik	190
D. Terbatas Total, Lengkap dan Kompak	197
1. Himpunan Terbatas dan Himpunan Terbatas Total 197	
2. Ruang Metrik Lengkap	201
3. Ruang Metrik Kompak.....	203
E. Himpunan-himpunan Khusus dalam Ruang Metrik ..	205
F. Himpunan Terhubung	209
DAFTAR PUSTAKA.....	212
BIOGRAFI PENULIS	213

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Jarak antara $a = -1$ dan $b = 1$	16
Gambar 1.2 Persekitaran $V_\varepsilon(a)$	16
Gambar 3.1 $\lim x \rightarrow c f x = L$	69
Gambar 3.2 $\lim x \rightarrow 412x + 1 = 3$	70
Gambar 3.3 Fungsi kontinu di suatu titik	81
Gambar 3.4 Grafik fungsi kontinu pada interval buka	82
Gambar 3.5 Grafik fungsi kontinu pada interval tutup	83
Gambar 3.6 Persekitaran $V_\varepsilon f(c)$	87
Gambar 3.7 Persekitaran $V_\delta f(c)$	88
Gambar 4.1 f mencapai nilai maksimum lokal di c	112

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL

Pada bagian ini dibahas tentang aljabar pada bilangan real, sifat urutan pada $\mathbb{R}$, sifat kelengkapan pada $\mathbb{R}$, dan sifat Archimedes pada $\mathbb{R}$.

A. Aljabar pada Bilangan Real

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner yang dilambangkan dengan $+$ dan $\cdot$ dan berturut-turut disebut penambahan dan perkalian. Operasi-operasi tersebut mempunyai sifat:

1. Sifat komutatif yaitu $a + b = b + a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
2. Sifat asosiatif yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Eksistensi unsur nol. Terdapat unsur nol di $\mathbb{R}$ sehingga $0 + a = a + 0 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$
4. Eksistensi unsur negatif. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, terdapat unsur $-a \in \mathbb{R}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
5. Sifat komutatif perkalian. $a \cdot b = b \cdot a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
6. Sifat asosiatif perkalian. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$
7. Eksistensi unsur satuan di $\mathbb{R}$. Terdapat unsur 1 di $\mathbb{R}$ yang berbeda dengan nol sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$
8. Eksistensi unsur kebalikan. Untuk setiap $a \neq 0$ di $\mathbb{R}$ terdapat unsur $\frac{1}{a}$ di $\mathbb{R}$ sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
9. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.1

- a. Jika z dan a unsur di R sehingga $z + a = a$ maka $z = 0$
b. Jika u dan $b \neq 0$ unsur di R sehingga $u \cdot b = b$ maka $u = 1$

Bukti:

- a. $z + a = a$
 $z + a + (-a) = a + (-a)$ [Tambahkan $(-a)$ pada kedua ruas]
 $z + 0 = 0$ [sifat 4]
 $z = 0$ [sifat 3]
- b. $u \cdot b = b$, karena $b \neq 0$ maka terdapat $\frac{1}{b}$ di $\mathbb{R}$, selanjutnya kedua ruas kita kalikan dengan $\frac{1}{b}$ sehingga,
 $(u \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = (b \cdot \frac{1}{b})$
 $u \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) = (b \cdot \frac{1}{b})$ [sifat 6]
 $u \cdot 1 = 1$ [sifat 8]
 $u = 1$ [sifat 7]

Teorema 1.1.2

- a. Jika a dan b unsur-unsur di R sehingga $a + b = 0$, maka $b = -a$
b. Jika $a \neq 0$ dan b unsur-unsur di R sehingga $a \cdot b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$

Bukti:

- a. $a + b = 0$
 $(-a) + (a + b) = (-a) + 0$ [Tambahkan $(-a)$ pada kedua ruas]
 $(-a + a) + b = -a$ [sifat 2 dan sifat 3]
 $0 + b = -a$ [sifat 4]
 $b = -a$ [sifat 3]
- b. $a \cdot b = 1$
Karena $a \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{a}$ di R , selanjutnya kedua ruas kita kalikan dengan $\frac{1}{a}$ sehingga

$$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 1$$

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \quad [\text{Sifat 6 dan sifat 7}]$$

$$1 \cdot b = \frac{1}{a} \quad [\text{sifat 8}]$$

$$b = \frac{1}{a} \quad [\text{sifat 7}]$$

Teorema 1.1.3

Jika $a \in \mathbb{R}$, maka

- a. $a \cdot 0 = 0$
- b. $(-1) \cdot a = -a$
- c. $-(-a) = a$
- d. $(-1)(-1) = 1$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{a. } a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a(1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Selanjutnya:

$$\begin{aligned} (-a) + (a + a \cdot 0) &= (-a) + a \\ (-a + a) + a \cdot 0 &= 0 \\ 0 + a \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $a \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{b. } (-1) \cdot a + a &= (-1) \cdot a + 1 \cdot a \\ &= (-1 + 1) \cdot a \\ &= 0 \cdot a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $(-1) \cdot a = -a$

$$\begin{aligned} \text{c. } -(-a) + (-a) &= (-1)(-a) + 1 \cdot (-a) \\ &= (-1 + 1)(-a) \\ &= 0 \cdot (-a) \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\text{Jadi } -(-a) = a$$

d. Dari bukti (b) ambil $a = -1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} (-1) \cdot (-1) &= -(-1) \\ &= 1 \text{ (bukti c)} \end{aligned}$$

Teorema 1.1.4

Misalkan a, b, c unsur-unsur di R

- Jika $a \neq 0$ maka $\frac{1}{a} \neq 0$ dan $\frac{1}{(\frac{1}{a})} = a$
- Jika $a \cdot b = a \cdot c$ dan $a \neq 0$ maka $b = c$
- Jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$

Bukti teorema di atas sebagai latihan bagi pembaca.

Bilangan rasional dan bilangan irrasional

Unsur di R yang dapat ditulis sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan bulat, $b \neq 0$ disebut **bilangan rasional**. Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan Q jadi

$$Q = \{x : \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Akan tetapi, tidak semua elemen R merupakan elemen Q , seperti $\sqrt{2}$ yang tidak dapat dinyatakan ke dalam bentuk $\frac{b}{a}$. Elemen R yang bukan elemen Q disebut **bilangan irrasional** (*irrational numbers*).

Akan ditunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan rasional yang kuadratnya adalah 2. Untuk membuktikannya digunakan istilah genap dan ganjil. Suatu bilangan asli disebut genap apabila bilangan itu mempunyai bentuk $2n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, dan disebut ganjil apabila bilangan itu mempunyai bentuk $2n - 1$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.5

Tak ada bilangan rasional t sehingga $t^2 = 2$

Bukti:

Andaikan ada $t \in \mathbb{Q}$ sehingga $t^2 = 2$, maka dapat dipilih p, q di $\mathbb{Z}$ sehingga $(\frac{p}{q})^2 = 2$ dan $(p, q) = 1$ karena $p^2 = 2q^2$, maka $p^2 =$ genap. Akibatnya p genap sehingga $p = 2m$ untuk suatu m bilangan bulat sehingga $4m^2 = 2q^2$ atau $q^2 = 2m^2$, yang berarti q^2 genap akibatnya q juga genap. Karena p, q keduanya genap, maka $(p, q) > 1$. Ini bertentangan dengan $(p, q) = 1$. Jadi haruslah tak ada bilangan rasional t sehingga $t^2 = 2$.

B. Sifat Urutan pada $\mathbb{R}$

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, terdapat himpunan tak kosong P dari $\mathbb{R}$ yaitu bilangan positif yang memenuhi sifat:

- a. Jika a, b di P maka $a + b$ di P
- b. Jika a, b di P maka ab di P
- c. Jika a di $\mathbb{R}$ maka tepat satu pernyataan berikut dipenuhi : a di P , $a = 0$, dan $-a$ di P . Sifat ini sering dinamakan sifat *trikotomi*.

Definisi 1.2.1

Jika a di P dikatakan bahwa a bilangan real positif dan ditulis $a > 0$. Jika a di P atau 0 , dikatakan bahwa a bilangan nonnegatif dan ditulis $a \geq 0$, jika $-a$ di P dikatakan bahwa a bilangan real negatif dan ditulis $a < 0$, jika $-a$ di P atau 0 , dikatakan bahwa a nonpositif dan ditulis $a \leq 0$.

Definisi 1.2.2

Misalkan a, b unsur-unsur di $\mathbb{R}$

- Jika $a - b$ di P maka kita tulis $a > b$ atau $b < a$
- Jika $a - b$ di $P \cup \{0\}$ maka kita tulis $a \geq b$ atau $b \leq a$, selanjutnya kita tulis $a < b < c$ yang berarti $a < b$ dan $b < c$.

Teorema 1.2.3

Misalkan a, b, c unsur-unsur di $\mathbb{R}$

- Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$
- Terdapat tepat satu hubungan $a < b, a = b, a > b$
- Jika $a \geq b$ dan $b \geq a$ maka $a = b$

Bukti:

- Diketahui $a > b$ dan $b > c$, ini berarti $a - b, b - c$ di P . Jadi $(a - b) + (b - c)$ di P atau $a - c$ di P . Dengan kata lain $a > c$
- Dengan sifat trikotomi maka terdapat tepat satu hubungan $a - b$ di $P, a - b = 0$, atau $-(a - b) = b - a$ di P atau $a > b, a = b$ atau $a < b$
- Andaikan $a \neq b$, maka $a - b \neq 0$ yang berarti $a - b$ di P atau $-(a - b) = b - a$ di P . Jadi $a > b$ atau $a < b$. Ini bertentangan dengan hipotesis yaitu $a \geq b$ dan $a \leq b$. Jadi haruslah $a = b$.

Teorema 1.2.4

Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.

Bukti:

Dengan sifat trikotomi maka $a \in P$ atau $-a \in P$,

jika $a \in P$ maka $a^2 = a \cdot a \in P$

jika $-a \in P$ maka $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$.

Jadi $a^2 > 0$

Teorema 1.2.5

Misalkan a, b, c, d unsur-unsur di $\mathbb{R}$

- a. Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$
- b. Jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d$
- c. Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ac > bc$
Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ac < bc$
- d. Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$
Jika $a < 0$ maka $\frac{1}{a} < 0$

Bukti sebagai latihan

Teorema 1.2.6

Jika a, b di $\mathbb{R}$ dan $a > b$, maka $a > \frac{1}{2}(a + b) > b$.

Bukti:

Karena $a > b$ maka $2a = a + a > a + b$ dan $a + b > b + b = 2b$.
Jadi $2a > a + b > 2b$.

Selanjutnya karena $2 > 0$ maka $\frac{1}{2} > 0$ dan menurut Teorema 1.2.5.c kita peroleh:

$$a = \frac{1}{2}(2a) > \frac{1}{2}(a + b) > \frac{1}{2}(2b) = b. \text{ Jadi } a > \frac{1}{2}(a + b) > b.$$

Teorema 1.2.7

Jika $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ maka $a > \frac{1}{2}a > 0$

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan

Teorema 1.2.8

Jika $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a = 0$

Bukti:

Andaikan $a > 0$ maka $a > \frac{a}{2} > 0$. Diambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ (ε_0 adalah bilangan real positif tegas), maka $a > \varepsilon_0 > 0$. Kontradiksi

dengan pernyataan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi pengandaian salah, seharusnya $a = 0$.

Perkalian antar dua bilangan positif hasilnya adalah positif. Akan tetapi, hasil perkalian yang positif belum tentu setiap faktornya positif.

Teorema 1.2.9

Jika $ab > 0$, maka berlaku

- i. $a > 0$ dan $b > 0$, atau
- ii. $a < 0$ dan $b < 0$.

Akibat 1.2.10

Jika $ab < 0$, maka berlaku

- i. $a < 0$ dan $b > 0$, atau
- ii. $a > 0$ dan $b < 0$.

Soal Latihan

1. Jika $a \in \mathbb{R}$ sehingga $a \cdot a = a$ buktikan $a = 0$ atau $a = 1$!

Petunjuk ringkas penyelesaian soal:

Soal di atas boleh dibuktikan salah satunya saja yaitu $a = 0$ atau $a = 1$.

Permasalahan: Akan dibuktikan bahwa, jika $a \in \mathbb{R}$ sehingga $a \cdot a = a$ maka $a = 0$ atau $a = 1$.

Petunjuk:

Anggap $a \neq 0$, dengan menggunakan Sifat 8 dalam aljabar pada bilangan real terbukti bahwa $a \cdot a = a$ maka $a = 1$.

2. Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ sehingga $ab = ac$ buktikan $b = c$!

Petunjuk ringkas penyelesaian soal:

Permasalahan: Akan dibuktikan bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ sehingga $ab = ac$ maka $b = c$.

Petunjuk:

Diketahui bahwa $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a}$ ada. Dengan mengalikan $\frac{1}{a}$ pada kedua ruas dari $ab = ac$ dan dengan menggunakan sifat 6, sifat 7, dan sifat 8 dalam aljabar pada bilangan real diperoleh $b = c$.

3. Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ buktikan $a^2 > 0$!

Petunjuk ringkas penyelesaian soal:

Permasalahan: akan dibuktikan bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.

Petunjuk:

Diketahui $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, dengan menggunakan sifat urutan (3) yaitu sifat trikotomi maka a di P atau $-a$ di P . Dari sifat ini diperoleh bahwa $a^2 > 0$

4. Jika $a > b$ dan $c > d$ buktikan $a + c > b + d$!

Petunjuk ringkas penyelesaian soal:

Permasalahan: akan dibuktikan bahwa jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d$.

Petunjuk:

Diketahui $a > b$ dan $c > d$, berdasarkan definisi 1.2.2 (i) maka $a - b$ di P dan $c - d$ di P. dengan menggunakan sifat urutan (1) maka terbukti $a + c > b + d$.

5. Jika $a > b$ dan $c > 0$ buktikan $ca > cb$!

Petunjuk ringkas penyelesaian soal:

Permasalahan: akan dibuktikan bahwa jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$.

Petunjuk:

Diketahui $a > b$ dan $c > 0$, berdasarkan definisi 1.2.2 (i) maka $a - b$ di P dan c di P. Dengan menggunakan sifat urutan (2) maka terbukti $ca > cb$.

6. Jika $a > b$ dan $c < 0$ buktikan $ca < cb$!

Petunjuk ringkas penyelesaian soal:

Permasalahan: akan dibuktikan bahwa jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$.

Petunjuk:

Diketahui $a > b$ dan $c < 0$, berdasarkan definisi 1.2.2 (i) maka $a - b$ di P dan $-c$ di P. Dengan menggunakan sifat urutan (2) maka terbukti $ca < cb$.

1. Ketaksamaan (Inequalities)

Selanjutnya, akan ditunjukkan bagaimana sifat urutan dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan. Perhatikan contoh dibawah ini.

Contoh 1.2.1

- a. Tentukan himpunan A dari bilangan real x sedemikian sehingga $2x + 3 \leq 6$.

Jawab:

Diketahui $x \in A$ dan $2x + 3 \leq 6$, maka

$$2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Jadi } A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{3}{2}\}$$

- b. Diberikan $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 2\}$. Tentukan bentuk lain dari B.

Jawab:

Diketahui $x \in B$ dan $x^2 + x > 2$ atau $x^2 + x - 2 > 0$ atau $(x - 1)(x + 2) > 0$. Sehingga diperoleh bahwa

1) $x - 1 > 0$ dan $x + 2 > 0$ diperoleh $x > 1$ dan $x > -2$ yang berarti $x > 1$

2) $x - 1 < 0$ dan $x + 2 < 0$ diperoleh $x < 1$ dan $x < -2$ yang berarti $x < -2$

Jadi himpunannya adalah $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$

Teorema 1.2.11

Jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, maka

a. $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

b. $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Teorema 1.2.12 Ketaksamaan Bernoulli

Jika $x > -1$ maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$

Bukti:

Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

Untuk $n = 1$, maka

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x \Leftrightarrow 1+x \geq 1+x \text{ (pernyataan benar)}$$

Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, yaitu:

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + kx + x + kx^2 \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \end{aligned}$$

Karena $kx^2 > 0$, maka $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$, yang berarti benar untuk $n = k+1$. Jadi, terbukti bahwa $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in N$

Teorema 1.2.13 Ketaksamaan Cauchy

Jika $n \in N$ dan $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in R$, maka

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Atau

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Selanjutnya, jika tidak semua $b_i = 0$ maka

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Jika dan hanya jika terdapat $s \in R$ sedemikian hingga $a_1 = sb_1$, $a_2 = sb_2$, ..., $a_n = sb_n$.

Bukti sebagai latihan.

2. Nilai Mutlak dan Garis Bilangan Real

Dari sifat trikotomi, dapat ditarik kesimpulan bahwa jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka a atau $-a$ merupakan bilangan real positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif dari dua bilangan tersebut.

Definisi 1.2.14

Nilai mutlak (absolute value) dari suatu bilangan real a , dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{jika } a > 0 \\ 0, & \text{jika } a = 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh, $|3| = 3$ dan $|-9| = 9$. Dapat dilihat dari definisi di atas bahwa $|a| \geq 0$ untuk semua $a \in R$, dan bahwa $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$.

Juga bahwa $|-a| = a$ untuk semua $a \in R$. Berikut ini diberikan beberapa sifat nilai mutlak.

Teorema 1.2.15

- (a) $|ab| = |a| |b|$ untuk semua $a \in R$.
- (b) $|a|^2 = a^2$ untuk semua $a \in R$.
- (c) Jika $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$.
- (d) $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk semua $a \in R$.

Bukti:

- (a) Jika $a = b = 0$, maka terbukti. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$, sehingga $|ab| = ab = |a||b|$. Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $ab < 0$, sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$.
- (b) Karena $a^2 \geq 0$, maka $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$.

- (c) Jika $|a| \leq c$, maka diperoleh $a \leq c$ yang berarti $-c \leq a \leq c$.
Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$. Jadi, $|a| \leq c$.
- (d) Gunakan langkah yang sama seperti pada (c) dengan mengambil $c = |a|$

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang disebut dengan Ketaksamaan Segitiga (*Triangel Inequality*).

Teorema 1.2.16 (Ketaksamaan Segitiga)

Jika $a, b \in R$, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

Dari Teorema 1.2.15 (d), diketahui $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Dengan menjumlahkan kedua persamaan diperoleh

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Menggunakan Teorema 1.2.15 (c) diperoleh bahwa $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Akibat 1.2.17

Jika $a, b \in R$, maka

- $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

- Tulis $a = a - b + b$ dan masukkan ke dalam Ketaksamaan Segitiga. Sehingga $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Kurangkan kedua ruas dengan $|b|$, diperoleh $|a| - |b| \leq |a - b|$. Gunakan cara yang sama untuk $b = b - a + a$, diperoleh $-|a - b| \leq |a| - |b|$. Kombinasikan kedua ketaksamaan tersebut, diperoleh

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Menggunakan Teorema 1.2.15 (c) diperoleh bahwa $||a| - |b|| \leq |a - b|$

- b. Gantilah b pada Ketaksamaan Segitiga dengan $-b$, sehingga diperoleh

$$|a - b| \leq |a| + |-b|. \text{ Karena } |-b| = b, \text{ maka diperoleh } |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Ketaksamaan Segitiga di atas dapat diperluas sehingga berlaku untuk sebarang bilangan real yang banyaknya berhingga.

Akibat 1.2.18

Jika $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah sebarang bilangan real, maka

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Contoh 1.2.2

Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$ untuk $x \in [2, 4]$. Tentukan konstanta M sedemikian sehingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2, 4]$.

$$\text{Diketahui } |f(x)| = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$$

$$\begin{aligned} |2x^2 - 3x + 1| &\leq |2x^2| - |3x| + |1| \\ &= 2|x^2| + 3|x| + 1 \\ &= 2|4^2| + 3|4| + 1 \\ &= 45 \end{aligned}$$

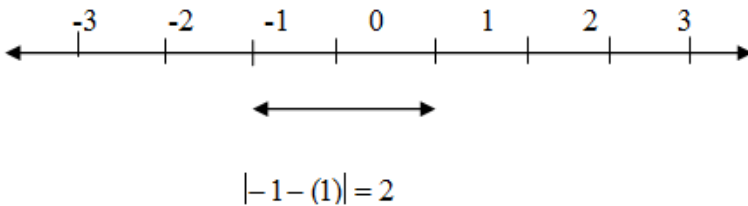
dan

$$\begin{aligned} |2x - 1| &\geq ||2x| - |1|| \\ &\geq ||2(2)| - |1|| \\ &= 3 \end{aligned}$$

Sehingga $|f(x)| = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1} \leq \frac{45}{3}$. Jadi, dengan mengambil $M = \frac{45}{3}$, didapat $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2, 4]$.

3. Garis Bilangan Real (*The Real Line*)

Interpretasi geometri yang dikenal di antaranya garis bilangan real (*real line*). Pada garis real, nilai mutlak $|a|$ dari suatu elemen $a \in \mathbb{R}$ adalah jarak a ke 0. Jarak (distance) antara elemen a dan b di $\mathbb{R}$ adalah $|a - b|$. Perhatikan gambar berikut:

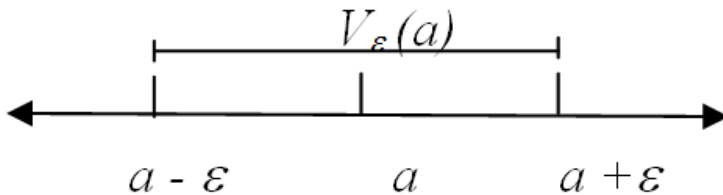


Gambar 1.1 Jarak antara $a = -1$ dan $b = 1$

Definisi 1.2.19

Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran ε (ε neighborhood) dari a didefinisikan sebagai himpunan

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Gambar 1.2 Persekitaran $V_\varepsilon(a)$.

Dapat dilihat bahwa $x \in V_\varepsilon(a)$ jika dan hanya jika $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Teorema 1.2.20

Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Jika x berada dalam persekitaran $V_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x=a$.

Bukti:

Jika x memenuhi $|x-a|<\varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka berdasarkan Teorema 1.2.8 diperoleh bahwa $|x-a| = 0$, yang berakibat $x = a$.

C. Kelengkapan pada $\mathbb{R}$

Definisi 1.3.1

Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$

1. Himpunan S dikatakan terbatas ke atas (*bounded above*) jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan batas atas (*upper bound*) dari S
2. Himpunan S dikatakan terbatas ke bawah (*bounded below*) jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan batas bawah (*lower bound*) dari S .
3. Suatu himpunan dikatakan terbatas (*bounded*) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas (*unbounded*).

Sebagai contoh, himpunan $S := \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$ ini terbatas ke atas, sebab bilangan 3 dan sebarang bilangan lebih dari 3 merupakan batas atas dari S . Himpunan ini tidak mempunyai batas bawah, jadi himpunan ini tidak terbatas ke bawah. Jadi, S merupakan himpunan yang tidak terbatas

Definisi 1.3.2

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$

1. Jika S terbatas diatas, maka suatu batas atas dikatakan *suprimum* (batas atas terkecil) dari S jika ia lebih kecil dari setiap batas atas yang lain dari S .
2. Jika S terbatas dibawah, maka suatu batas bawah dikatakan *infimum* (batas bawah terbesar) dari S jika ia lebih besar dari setiap batas bawah yang lain dari S .

Definisi di atas dapat dinyatakan dengan cara lain:

- a. $u \in \mathbb{R}$ suprimum dari $S \subseteq \mathbb{R}$, jika memenuhi dua sifat:

- 1) $s \leq u$ untuk semua $s \in S$
- 2) Jika $s \leq v$ untuk semua $s \in S$ maka $u \leq v$

Ditulis $u = \sup S$.

- b. $t \in \mathbb{R}$ infimum dari $S \subseteq \mathbb{R}$, jika memenuhi dua sifat berikut:

- 1) $s \geq t$ untuk semua $s \in S$
- 2) Jika $s \geq r$ untuk semua $s \in S$ maka $t \geq r$.

Ditulis $t = \inf S$

Jika diberikan suatu himpunan S subset dari $\mathbb{R}$, maka hanya terdapat satu supremum, atau supremumnya tunggal. Juga dapat ditunjukkan bahwa jika u' adalah sebarang batas atas dari suatu himpunan tak kosong S , maka $\sup S \leq u'$, sebab $\sup S$ merupakan batas atas terkecil dari S . Suatu subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ mempunyai empat kemungkinan, yaitu

- a. mempunyai supremum dan infimum,
- b. hanya mempunyai supremum,
- c. hanya mempunyai infimum,
- d. tidak mempunyai infimum dan supremum.

Setiap bilangan real $a \in \mathbb{R}$ merupakan batas atas dan sekaligus juga merupakan batas bawah himpunan kosong $\emptyset$. Jadi, himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai supremum dan infimum.

Teorema 1.3.3

Suatu batas atas u dari himpunan tak kosong S di $\mathbb{R}$ adalah supremum dari S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Bukti:

($\Leftarrow$) Misalkan u batas atas sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Akan ditunjukkan $u = \sup S$. Misalkan v batas atas dan $v \neq u$.

Andaikan $v < u$, ambil $\varepsilon = u - v > 0$, menurut hipotesis, maka terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$. Akibatnya $u - (u - v) = v < s_\varepsilon$. Ini suatu kontradiksi bahwa v batas atas, jadi haruslah $v > u$, yang berarti $u =$ batas atas terkecil dari S . Jadi $u = \sup S$.

($\Rightarrow$) Misalkan $u = \sup S$ dan ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas dari S . Ini berarti terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Contoh-contoh:

1. Jika S_1 hanya mempunyai berhingga unsur, maka dapat ditunjukkan bahwa S_1 mempunyai unsur terbesar u dan unsur terkecil v . Maka $u = \sup S_1$ dan $v = \inf S_1$. Dimana u dan v unsur-unsur di S_1 .
2. Himpunan $S_2 = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 2\}$. Himpunan ini mempunyai batas atas terkecil 2 dan batas bawah terbesar 0 yang keduanya terletak pada S_2 .

3. Himpunan $S_3 = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 2\}$. Himpunan ini mempunyai batas atas terkecil 2 dan batas bawah terbesar 0 tetapi keduanya tidak terletak pada S_3 .

Sifat Lengkap R (Aksioma Suprimum R) 1.3.4

Jika subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ terbatas ke atas maka supremumnya ada, yaitu terdapat $u \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $u = \sup S$

Akibat 1.3.5

Jika subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w = \inf S$

Bukti:

Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subset \mathbb{R}$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Aksioma Supremum, $\sup S$ ada, namakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf T$.

Teorema 1.3.6

Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ yang terbatas ke atas dan sebarang $a \in \mathbb{R}$. Didefinisikan himpunan $a + S := \{a + s : s \in S\}$, maka berlaku

$$\sup(a + S) = a + \sup(S)$$

Bukti:

Jika diberikan $u := \sup S$, maka $x \leq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \leq a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ merupakan batas atas dari himpunan $a + S$. Akibatnya $\sup(a + S) \leq a + u$. Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka $a + x \leq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \leq v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ merupakan batas atas S . Oleh karena itu, $u = \sup S \leq v - a$. Karena v adalah sebarang batas

atas $a + S$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup S$, diperoleh $a + u \leq \sup(a + S)$. Di lain pihak diketahui $\sup(a + S) \leq a + u$. Akibatnya terbukti bahwa $\sup(a + S) = a + u = a + \sup S$

Teorema 1.3.7

Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ yang terbatas dan sebarang bilangan real $a > 0$. Didefinisikan himpunan $aS := \{as : s \in S\}$, maka berlaku

$$\inf(aS) = a \inf(S)$$

Bukti:

Tulis $u = \inf aS$ dan $v = \inf S$. Akan dibuktikan bahwa $u = av$. Karena $u = \inf aS$, maka $u \leq as$, untuk setiap $s \in S$. Karena $v = \inf S$, maka $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya $av \leq as$ untuk setiap $s \in S$. Berarti av merupakan batas bawah aS . Karena u batas bawah terbesar aS , maka $av \leq u$. Karena $u \leq as$ untuk setiap $s \in S$, maka diperoleh $\frac{u}{a} \leq s$ untuk setiap $s \in S$ (sebab $a > 0$). Karena $v = \inf S$, maka $\frac{u}{a} \leq v$ yang berakibat $u \leq av$. Di lain pihak diketahui $av \leq u$. Akibatnya $u = av$. Jadi, terbukti bahwa $\inf(aS) = a \inf(S)$.

Teorema 1.3.8

Jika A dan B subset tak kosong $\mathbb{R}$ dan memenuhi $a \leq b$ untuk semua $a \in A$ dan $b \in B$, maka $\sup A \leq \inf B$.

Bukti:

Diambil sebarang $b \in B$, maka $a \leq b$ untuk semua $a \in A$. Artinya bahwa b merupakan batas atas A , sehingga $\sup A \leq b$. Selanjutnya, karena berlaku untuk semua $b \in B$, maka $\sup A$ merupakan batas bawah B . Akibatnya diperoleh bahwa $\sup A \leq \inf B$.

Soal Latihan

1. Misalkan $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$. Tunjukkan bahwa himpunan S_1 mempunyai batas bawah tetapi tidak mempunyai batas atas. Tunjukkan $\inf S_1$!

Petunjuk bukti:

Karena $x \geq 0$, untuk setiap $x \in S_1$, maka menurut definisi 0 adalah salah satu batas bawah dari S_1 .

Permasalahan: Akan ditunjukkan bahwa $0 = \inf S_1$.

Misalkan t sebarang batas bawah S_1 , akan ditunjukkan $t \leq 0$.

Andaikan $t > 0$, karena $0 \in S_1$ berarti t bukan batas bawah S_1 . Kontradiksi dengan t batas bawah S_1 .

Pengandaian $t > 0$ salah.

Jadi $t \leq 0$. 0 adalah salah satunya batas bawah dari S_1 , t sebarang batas bawah S_1 sehingga $t \leq 0$ maka menurut definisi $0 = \inf S_1$.

2. Misalkan $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$. Apakah S_2 memiliki batas bawah? Tunjukkan pernyataan saudara

Petunjuk Bukti:

Karena $x > 0$, untuk setiap $x \in S_2$.

Permasalahan: akan dibuktikan bahwa $0 = \inf S_2$.

Andaikan 0 bukan batas bawah dari S_2 berarti terdapat $s \in S$ sehingga $s < 0$.

$s < 0$ maka $s \notin S$. Kontradiksi dengan $s \in S$.

Jadi pengandaian 0 bukan batas bawah dari S_2 adalah salah. Jadi 0 batas bawah dari S_2 .

3. Misalkan $S_3 = \{1 - (-1)^n / n : n \in \mathbb{N}\}$. Temukan $\inf S_3$ dan $\sup S_3$.

Petunjuk penyelesaian:

Permasalahan: akan ditentukan $\inf S_3$ dan $\sup S_3$.

Penyelesaian:

Tentukan anggota dari himpunan S_3 , kemudian tentukan $\inf S_3$ dan $\sup S_3$.

4. Misalkan $S_4 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 5\}$. Tentukan supremum dan infimum dari S_4 .

Petunjuk penyelesaian:

Permasalahan: akan ditentukan supremum dan infimum S_4 .

Penyelesaian:

Tentukan batas bawah dan batas atas himpunan S_4 , kemudian tentukan batas atas terkecil dan batas bawah terbesarnya.

D. Sifat Archimedes pada R

Perhatikan bilangan asli N . Bilangan asli ini terbatas dibawah oleh 1, tetapi tidak terbatas di atas oleh R. Ini berarti bahwa jika diberikan sebarang bilangan real x , maka terdapat $n \in N$ sehingga $x < n$.

Teorema 1.4.1 (Teorema Archimedes)

Jika $x \in R$ maka terdapat bilangan asli $n \in N$ sehingga $x < n$.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in R$. Andaikan tidak ada $n \in N$ sedemikian sehingga $x < n$, maka $n \leq x$, untuk setiap $n \in N$. Dengan kata lain, x merupakan batas atas N . Jadi $N \subseteq R$, $N \neq \emptyset$, dan N terbatas ke atas. Menurut aksioma supremum, maka $\sup N$ ada, tulis $u = \sup N$. Karena $u - 1 < u$, maka menurut Teorema 1.3.3 terdapat $m \in N$ sehingga $u - 1 < m$. Tetapi kemudian $u < m + 1$ dengan $(1 + m) \in N$. Timbul kontradiksi dengan $u = \sup N$, artinya u bukan batas atas dari N . Jadi pengandaian salah, yang benar adalah terdapat $n \in N$ sehingga $x < n$.

Akibat 1.4.2

Jika $S := \left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$, maka $\inf S = 0$

Bukti:

Karena $S \neq \emptyset$ terbatas ke bawah oleh 0, maka S mempunyai infimum, tulis $w := \inf S$. Jelas bahwa $w \geq 0$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, menggunakan Sifat Archimedes, terdapat $n \in N$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < n$ akibatnya $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Oleh karena itu $0 \leq w < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Akan tetapi karena $\varepsilon > 0$ sebarang,

maka berdasarkan Teorema 1.2.8 berakibat bahwa $w = 0$.
Terbukti bahwa $\inf S = 0$.

Akibat 1.4.3

Misalkan y dan z bilangan real positif, maka :

- Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $z < ny$
- Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $0 < 1/n < y$
- Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n - 1 \leq z < n$

Bukti:

- Sebut $x = \frac{z}{y} > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{z}{y} = x < n$. Oleh karena itu $z < ny$.
- Dari bukti (a) ambil $z = 1$, maka $1 < ny$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\frac{1}{n} < y$. Jadi $0 < \frac{1}{n} < y$
- Sifat Archimedes menjamin bahwa subset $K = \{m \in \mathbb{N} : z < m\}$. Jelas $K \neq \emptyset$. Misalkan n bilangan terkecil dari himpunan ini, maka $n - 1$ bukan anggota himpunan ini, sehingga $n - 1 \leq z < n$.

Eksistensi Bilangan Real dan Densitas Bilangan Rasional di $\mathbb{R}$

Salah satu penggunaan Sifat Supremum adalah dapat digunakan untuk memberikan jaminan eksistensi bilangan-bilangan real. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Teorema 1.4.4

Ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Bukti:

Dibentuk himpunan $S = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0 \text{ dan } s^2 < 2\}$. Jelas bahwa $S \neq \emptyset$ sebab $0 \in S$ dan $1 \in S$. S terbatas ke atas dengan

salah satu batas atasnya adalah 2. Jika $t \geq 2$, maka $t^2 \geq 4$. Jadi, $t = 2 \notin S$. Menggunakan Aksioma Supremum, $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, dan S terbatas ke atas, maka S mempunyai supremum. Namakan $x = \sup S$, dengan $x \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $x^2 = 2$. Andaikan $x^2 \neq 2$, maka $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

Kemungkinan I: Untuk $x^2 < 2$.

Karena $x^2 < 2$, maka $2 - x^2 > 0$. Karena $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ maka,

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1)$$

Karena $2 - x^2 > 0$ dan $2x + 1 > 0$ maka $\frac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$. Menurut sifat akibat Archimedes, dapat ditemukan $n \in \mathbb{N}$ sehingga,

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$$

Akibatnya,

$$\frac{1}{n}(2x + 1) < 2 - x^2$$

dan

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1) = x^2 + 2 - x^2 = 2$$

Diperoleh bahwa, $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, yang berarti bahwa $x + \frac{1}{n} \in S$. Kontradiksi dengan $x = \sup S$. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 < 2$.

Kemungkinan II: $x^2 > 2$

Karena $x^2 > 2$ maka $x^2 - 2 > 0$, Perhatikan bahwa:

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2}{m}x$$

Karena $x^2 - 2 > 0$ dan $2x > 0$, maka dipilih $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga:

$$m > \frac{2x}{x^2 - 2} \text{ atau } \frac{2x}{m} < x^2 - 2$$

akibatnya,

$$(x - \frac{1}{m})^2 > x^2 - \frac{2}{m}x > x^2 - (x^2 - 2) = 2$$

Diperoleh bahwa $(x - \frac{1}{m})^2 > 2$. Berarti $x - \frac{1}{m} \notin S$, yaitu $x - \frac{1}{m}$ batas atas. Kontradiksi dengan $x = \sup S$. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 > 2$. Jadi pengandaian salah, seharusnya $x^2 = 2$.

Teorema 1.4.5 (The Density Theorem)

Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$ maka terdapat bilangan rasional r sehingga $x < r < y$.

Bukti:

Tanpa mengurangi keumuman (*without loss of generality*), diambil $x > 0$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n > \frac{1}{y-x}$, jadi $ny - nx > 1$.

Karena $nx > 0$, maka menurut Akibat 1.4.3, terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga $m - 1 \leq nx \leq m$, m ini juga memenuhi $m < ny$ (karena $m - nx \leq 1 < ny - nx$ atau $m < ny$).

Jadi kita peroleh $nx < m < ny$ atau $x < \frac{m}{n} < y$. Pilih $r = \frac{m}{n}$, jadi r bilangan rasional dan memenuhi $x < r < y$.

Soal Latihan

1. Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$ buktikan bahwa ada bilangan irrasional r sedemikian sehingga $x < r < y$!

Petunjuk bukti:

Permasalahan: akan ditunjukkan bahwa $x < r < y$

Diketahui $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$.

Dengan menggunakan Teorema Densitas, dan sifat bilangan rasional. Akibatnya $x < q\sqrt{2} < y$ dan $q\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

2. Jika $S := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, buktikan $\inf S = 0$!

Petunjuk bukti:

Permasalahan: Akan ditunjukkan bahwa $\inf S = 0$.

Karena $S \neq \emptyset$ terbatas kebawah oleh 0, maka S mempunyai infimum. Di tulis $w := \inf S$. Jelas $w \geq 0$. Dengan menggunakan sifat Archimedes dan Teorema 1.2.8 diperoleh bahwa $\inf S = 0$.

3. Jika $y > 0$, terdapat $n_y \in \mathbb{N}$, buktikan $n_y - 1 < y < n_y$!

Petunjuk bukti:

Permasalahan: akan ditunjukkan $n_y - 1 < y < n_y$.

Dengan menggunakan sifat Archimedes dan sifat urutan. E_y mempunyai elemen yang paling kecil dinotasikan dengan n_y . Oleh karena itu $n_y - 1$ bukan elemen E_y . Akibatnya $n_y - 1 < y < n_y$.

BAB II

BARISAN BILANGAN REAL

Pada bab ini dibahas mengenai pengertian barisan bilangan real. Selanjutnya, dibahas tentang limit dan konvergensi dari suatu barisan. Di antaranya adalah Teorema Konvergen Monoton, prinsip barisan bagian, dan Kriteria Cauchy untuk barisan yang konvergen.

A. Barisan dan Limit Barisan

Barisan (*sequence*) pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain $\mathbb{N}$ dan mempunyai range dalam S . Pada subbab ini akan dibahas mengenai barisan di $\mathbb{R}$ dan konvergensi dari suatu barisan

Definisi 2.1.1.

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N}$ dengan range dalam $\mathbb{R}$.

Dengan kata lain, barisan dalam $\mathbb{R}$ mengawankan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \dots$ kepada suatu bilangan real. Jika $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n . Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n: n \in \mathbb{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}_{n \geq 1}$. Apabila diketahui suatu barisan Y , artinya $Y = (y_k)$.

Contoh 2.1.1

1. Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$
2. Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n}, \left(\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

3. Barisan konstan (k_n) , dengan $k_n = 2$ adalah $2, 2, 2, 2, \dots$
4. Barisan $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

Definisi 2.1.2

Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) , dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka dapat didefinisikan:

1. $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n), n \in \mathbb{N}$
2. $\alpha (x_n) = (\alpha x_n), n \in \mathbb{N}$
3. $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n), n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right), y_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$

Definisi di atas menyatakan bahwa suku-suku barisan baru yang merupakan jumlah dua barisan lainnya dibentuk dengan menjumlahkan suku-suku yang berpadanan pada kedua barisan lainnya. Untuk barisan-barisan selisih, hasil kali dan hasil bagi dua barisan, dikerjakan dengan cara yang serupa. Sebagai contoh, jika $X = (x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ dan $Y = (y_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots)$ maka $X + Y = (1, 1, 1, 1, \dots)$, $X - Y = (1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{4}, \dots)$. Contoh lain, Misalkan X, Y suatu barisan

$$X = (3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots)$$

$$Y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$$

Maka,

$$X + Y = (4, \frac{13}{2}, \frac{28}{3}, \dots, \frac{3n^2+1}{n}, \dots)$$

$$X - Y = (4, \frac{11}{2}, \frac{26}{3}, \dots, \frac{3n^2-1}{n}, \dots)$$

$$X \cdot Y = (3, 3, 3, 3, \dots, 3, \dots)$$

$$2X = (6, 12, 18, 24, \dots, 6n, \dots)$$

$$\frac{X}{Y} = (3, 12, 27, 48, \dots, 3n^2, \dots)$$