

# **Struktur Aljabar - Teori Ring**

# Struktur Aljabar - Teori Ring

---

Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.



# Struktur Aljabar - Teori Ring

---

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:  
**Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.**

Editor: Erik Santoso

Cetakan Pertama: Desember 2021

Cover: Rusli

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2021, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

**Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia**  
**ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT**  
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151  
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: [www.rcipress.rcipublisher.org](http://www.rcipress.rcipublisher.org)  
E-mail: [rumahcemerlangindonesia@gmail.com](mailto:rumahcemerlangindonesia@gmail.com)

Copyright © 2021 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia  
All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2021  
; 14,8 x 21 cm  
ISBN: 978-623-5847-52-8

Hak cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan  
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang  
**Hak Cipta Pasal 72**

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta  
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

# KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kita haturkan kehadirat Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya kepada kita semua sehingga dapat menjalankan aktivitas sehari-hari dan khususnya kepada penulis yang selalu diberi kelancaran untuk menyelesaikan penulisan Buku Struktur Aljabar khususnya materi Teori Ring ini.

Dengan keberadaan buku ini, diharapkan dapat membantu para mahasiswa untuk lebih mudah memahami konsep-konsep Ring. Buku ini disajikan kepada pembaca yang telah mempelajari Teori Bilangan dan Pengantar Dasar Matematika.

Manusia secara kontinu merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan agar dapat diuraikan dalam dunia nyata adalah sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu.

Dalam mempelajari suatu ilmu sesuai dengan paradigma *ulul albab*, yakni berbekal kemampuan intelektual semata tidak cukup, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris dan logis.

Matematika Perguruan Tinggi lebih menekankan pada pembentukan pola pikir matematika yaitu logis, kritis, dan tegas. Jadi bukan lagi untuk mengasah kemampuan berhitung semata atau kemampuan menerapkan konsep ke dalam pemecahan masalah. Mahasiswa diharapkan dapat mengasah pola pikirnya melalui ketekunan dalam mempelajari langkah demi langkah berbagai aksioma, definisi, lemma, maupun teorema-teorema yang berkaitan

dengan Struktur Aljabar khususnya Teori Ring.

Buku ini ditulis berdasarkan pengalaman penulis dalam mengajar mata kuliah struktur aljabar di Prodi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar. Buku ini disusun untuk mengatasi kekurangan buku acuan struktur aljabar terkait Teori Ring yang berbahasa Indonesia. Penyajian pokok bahasan disusun sedemikian rupa dan disertai dengan contoh-contoh, agar pembaca khususnya mahasiswa dapat meninjaunya dari berbagai aspek, sehingga kaitan antara definisi, teorema, dan penggunaannya dalam menyelesaikan masalah nampak jelas. Selain itu, setiap teorema disertai dengan contoh agar pembaca dapat lebih mudah memahami konsep yang dikandung dalam teorema tersebut.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca demi penyempurnaan buku ini dalam edisi yang akan datang.

Akhirnya penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi, penulis, pembaca dan perkembangan ilmu pengetahuan secara umum. Amiiin.

Makassar, April 2021

Penulis

# DAFTAR ISI

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| KATA PENGANTAR .....                               | i   |
| DAFTAR ISI .....                                   | iii |
| DAFTAR TABEL .....                                 | v   |
| DAFTAR GAMBAR.....                                 | vi  |
| BAB I DASAR-DASAR HIMPUNAN .....                   | 1   |
| A. Sejarah Ringkas Teori Himpunan .....            | 1   |
| B. Pengertian Himpunan .....                       | 1   |
| 1. Konsep Dasar Himpunan.....                      | 2   |
| 2. Relasi antar Himpunan.....                      | 4   |
| 3. Operasi Pada Himpunan.....                      | 7   |
| 4. Sifat-sifat Operasi.....                        | 9   |
| C. Pemetaan.....                                   | 13  |
| D. Relasi Ekuivalen.....                           | 17  |
| E. Sifat-sifat Operasi Biner.....                  | 20  |
| F. Latihan.....                                    | 23  |
| <br>BAB II TEORI RING .....                        | 24  |
| A. Sifat-sifat Ring.....                           | 25  |
| B. Integral Domain.....                            | 37  |
| C. Field (Lapangan) .....                          | 41  |
| D. Latihan.....                                    | 43  |
| <br>BAB III SUBRING DAN IDEAL.....                 | 44  |
| A. Subring .....                                   | 45  |
| B. Ideal .....                                     | 49  |
| C. Latihan.....                                    | 53  |
| <br>BAB IV RING FAKTOR DAN HOMOMORFISMA RING ..... | 54  |
| A. Ring Faktor .....                               | 55  |
| B. Homomorfisma Ring.....                          | 62  |
| C. Latihan.....                                    | 72  |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| BAB V RING POLINOM.....                     | 73 |
| A. Ring Polinom .....                       | 73 |
| B. Algoritma Pembagian Polinom .....        | 75 |
| C. Unsur Tereduksi dan Tidak Tereduksi..... | 81 |
| D. Latihan.....                             | 85 |
| DAFTAR PUSTAKA .....                        | 87 |
| BIOGRAFI PENULIS .....                      | 89 |

## DAFTAR TABEL

|                                                                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabel 2.1 Daftar Cayley $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ -0.....                                                              | 27 |
| Tabel 2.2 Daftar Cayley $(\mathbb{P}, +)$ dan $(\mathbb{P}, \cdot)$ .....                                                                    | 32 |
| Tabel 2.3 Daftar Cayley $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ .....                                                                                        | 40 |
| Tabel 4.1 Daftar Cayley $(\mathbb{Z}_6/K = \mathbb{Z}_6/\{0, 2, 4\}, +)$ dan $(\mathbb{Z}_6/K =$<br>$\mathbb{Z}_6/\{0, 2, 4\}, \cdot)$ ..... | 59 |

# DAFTAR GAMBAR

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| Gambar 1.1 Himpunan Bagian dan Himpunan Bagian Sejati.....           | 4  |
| Gambar 1.2 Diagram Venn Satu Gabungan, Irisan dan Komplemen<br>..... | 8  |
| Gambar 1.3 fungsi $f$ dari $A$ ke $B$ .....                          | 14 |
| Gambar 1.4 Gambaran $f: A \rightarrow B$ .....                       | 15 |
| Gambar 1.5 Pemetaan injektif, surjektif dan bijektif .....           | 17 |

# BAB I

## DASAR-DASAR HIMPUNAN

---

### A. Sejarah Ringkas Teori Himpunan

---

George Cantor (1845 – 1918) dianggap sebagai bapak teori himpunan, karena beliaulah yang pertama kali mengembangkan cabang matematika ini. Ide-idenya tentang teori himpunan dapat memuaskan keinginan public terutama idenya tentang himpunan tak berhingga (infinite yaitu himpunan yang banyak anggotanya tak berhingga).

Beliau mengembangkan hierarki himpunan infinite yang ternyata dapat digunakan diberbagai himpunan infinite yang berbeda. Penemuan ini dianggap penemuan yang revolusioner oleh para matematikawan pada jaman itu. Cantor meninggal di suatu institusi mental di Jerman pada usia 73 tahun. Banyak yang menganggap bahwa mentalnya jatuh karena serangan-serangan terhadap ide-ide dan hasil karyanya yang dilakukan oleh para matematikawan lain.

Pada tahun-tahun terakhir ini, teori himpunan mendapatkan perhatian khusus dalam penguasaan matematika, karena setiap cabang matematika berkaitan erat dan menjadi bagian teori himpunan.

### B. Pengertian Himpunan

---

Suatu koleksi (kumpulan) objek yang didefinisikan dengan baik (well defined) disebut himpunan .<sup>1</sup> Kumpulan itu dapat berupa daftar, koleksi, dan kelas. Objek-objek dalam kumpulan itu dapat berupa benda konkrit atau benda abstrak, seperti bilangan, abjad, orang, sungai, negara. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen dari himpunan itu.

---

Syarat tertentu dan jelas dalam menentukan himpunan itu menyebabkan kita dapat membedakan objek yang merupakan anggota himpunan dan objek yang bukan merupakan anggota himpunan. Himpunan yang mempunyai syarat tertentu dan jelas sehingga dapat ditentukan objek mana yang menjadi anggota himpunan itu dan objek mana yang bukan anggota himpunan itu disebut himpunan yang terdefinisi dengan baik (*well defined*).

## 1. Konsep Dasar Himpunan

Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf besar  $A, B, C, K, X, \dots$ , dan sebagainya. Sedang anggota suatu himpunan dinyatakan dengan huruf kecil  $a, b, c, k, x, \dots$  dan sebagainya.

Ada 3 cara untuk mendefinisikan suatu himpunan yaitu:

- 1) Dengan mendaftar anggota-anggotanya di antara kurung kurawal buka dan tutup.

### **Contoh 1.1**

---

1.  $P = \{a, i, e, o, u\}$
2.  $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

- 2) Dengan menyatakan sifat-sifat yang dipenuhi oleh anggota-anggotanya

### **Contoh 1.2**

---

1.  $P$  = himpunan vokal dan abjad latin
2.  $Q$  = himpunan bilangan cacah ganjil yang kurang dari 10

- 3) Dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan

### **Contoh 1.3**

---

1.  $P = \{x \mid x \text{ adalah vokal dan abjad latin}\}$
2.  $Q = \{x \mid x \text{ adalah bilangan cacah ganjil yang kurang dari } 10\}$

Symbol “=” berarti “adalah nama lain dari”

Jika  $x$  adalah anggota himpunan  $A$ , berarti  $A$  mempunyai  $x$  sebagai salah satu anggotanya dan dapat ditulis:  $x \in A$  (dibaca  $x$  anggota  $A$  atau  $x$  elemen  $A$ ). Sebaliknya jika  $x$  bukan anggota himpunan  $A$ , berarti  $A$  tidak mempunyai  $x$  sebagai salah satu anggotanya maka ditulis:  $x \notin A$  (dibaca:  $x$  bukan anggota  $A$ , atau  $x$  bukan elemen  $A$ ).

### **Contoh 1.4**

---

1.  $P = \{a, i, e, o, u\}$ , maka  $a \in P, b \notin P, e \in P$
2.  $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , maka  $3 \in Q, 6 \notin Q, 8 \notin Q$

Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut *himpunan kosong* dan dinyatakan dengan simbol  $\emptyset$  atau  $\{\}$ . Misalnya,  $\{x : x \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2 < 0\} = \emptyset$ . Himpunan yang hanya mempunyai satu anggota, seperti  $\{x\}$ , disebut *himpunan singleton*.

Selanjutnya, notasi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}$ , dan  $\mathbb{C}$  akan digunakan berturut-turut sebagai himpunan bilangan asli, rasional, real, bulat, dan kompleks. Dan kita gunakan notasi khusus untuk interval dari garis bilangan real sebagai berikut.

Jika  $a, b$  bilangan-bilangan real dengan  $a < b$ , maka:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  disebut interval tutup
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  disebut interval buka
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  disebut interval setengah buka  
(buka kanan)
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  disebut interval setengah buka  
(buka kiri)

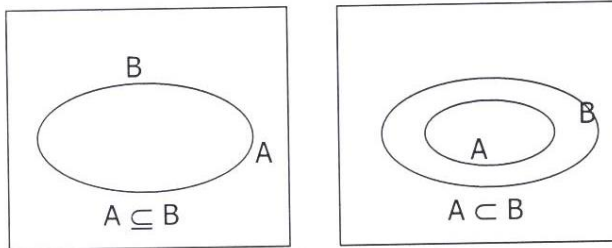
## 2. Relasi antar Himpunan

### a. Subset dari Himpunan

#### **Definisi 1.1**

Himpunan  $A$  disebut himpunan bagian (subset) dari himpunan  $B$  jika setiap anggota  $A$  juga merupakan anggota  $B$ , yaitu  $x \in A \Rightarrow x \in B$ , maka  $A$  disebut himpunan bagian dari  $B$ , ditulis  $A \subseteq B$ .

Relasi ini dinyatakan dengan notasi  $A \subset B$  (dibaca  $A$  “himpunan bagian”  $B$  atau  $A$  “subset” dari  $B$ ).



**Gambar 1.1 Himpunan Bagian dan Himpunan Bagian Sejati**

#### **Contoh 1.5**

1.  $C = \{1, 3, 5\}$  adalah himpunan bagian dari  $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  karena 1, 3, 5 yang anggota  $C$  juga menjadi anggota  $Q$ . Maka ditulis  $C \subset Q$
2. Diketahui  $D = \{a, i, o, e\}$  dan  $E = \{i, a, e, o\}$ . Karena  $a, i, o, e$  yang menjadi anggota  $D$  juga menjadi anggota  $E$ , maka dapat ditulis  $D \subset E$
3. Diketahui  $G = \{\text{bilangan bulat genap}\}$  dan  $B = \{\text{bilangan bulat}\}$ . Maka  $G \subset B$

#### **Contoh 1.6**

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan asli  $N$  merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan bilangan bulat  $Z$ , himpunan bilangan

bulat  $\mathbb{Z}$  merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan bilangan rasional  $\mathbb{Q}$  dan himpunan bilangan rasional  $\mathbb{Q}$  merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan bilangan real  $\mathbb{R}$ .

### Penyelesaian :

Diketahui :

$$\mathbb{N} = \{\text{himpunan bilangan asli}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\text{himpunan bilangan bulat}\} = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

$$\mathbb{Q} = \{\text{himpunan bilangan rasional}\} = \{\dots, -2, -1,5, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, \dots\}$$

$$\mathbb{R} = \{\text{himpunan bilangan real}\} = \{\dots, -2, -1,5, -1, -1/2, -1/4, 0, 0,25, 1/2, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$A$  subset  $B$  dapat ditulis sebagai  $B \supset A$ , dibaca  $B$  superset  $A$  atau  $B$  memuat  $A$ . Jika  $A$  bukan subset  $B$ , maka ditulis  $A \not\subset B$ .

### b. Himpunan yang Sama

#### **Definisi 1.2**

---

Himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  adalah sama (ditulis  $A = B$ ) jika dan hanya jika  $A \subset B$  dan  $B \subset A$ .

#### **Contoh 1.7**

- 
1. Ditentukan himpunan  $A = \{a, b, c, d\}$  dan  $B = \{b, d, a, c\}$ . Maka himpunan  $A = B$ , berarti  $\{a, b, c, d\} = \{b, d, a, c\}$  karena setiap anggota himpunan  $A$  juga menjadi anggota himpunan  $B$ , dan anggota himpunan  $B$  juga menjadi anggota himpunan  $A$ . Dengan demikian urutan anggota dari dua himpunan tidak diperhatikan.
  2. Ditentukan himpunan  $P = \{1, 2, 3\}$  dan  $Q = \{1, 3, 2, 1, 2\}$ . Maka himpunan  $P = Q$ , berarti  $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2, 1, 2\}$  karena setiap anggota himpunan  $P$  juga menjadi

anggota himpunan  $\mathcal{Q}$ , dan sebaliknya. Dengan demikian penulisan ulangan anggota suatu himpunan tidak diperhatikan dan ditulis tanpa pengulangan.

### c. Himpunan yang Berpotongan

#### *Definisi 1.3*

---

Dua himpunan  $\mathcal{A}$  dan  $\mathcal{B}$  dikatakan berpotongan jika dan hanya jika ada anggota  $\mathcal{A}$  yang menjadi anggota  $\mathcal{B}$ .

#### *Contoh 1.8*

---

1.  $C = \{3, 4, 5, 6\}$  dan  $D = \{2, 5, 8\}$  adalah dua himpunan yang berpotongan, karena ada anggota  $C$  yaitu 5 yang menjadi anggota  $D$ .
2. Ditentukan  $X = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$  dan  $Y = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ . Maka  $X$  dan  $Y$  berpotongan, karena  $X = \{-1, -2\}$  dan  $Y = \{3, -2\}$ , ada anggota  $X$  yang juga anggota  $Y$ , yaitu -2.

### d. Himpunan yang Saling Lepas

#### *Definisi 1.4*

---

Dua himpunan  $\mathcal{A}$  dan  $\mathcal{B}$  dikatakan lepas (ditulis  $\mathcal{A} \parallel \mathcal{B}$ ) jika dan hanya jika kedua himpunan itu tidak kosong dan tidak mempunyai elemen yang sama.

#### *Contoh 1.9*

---

1.  $F$  = himpunan bilangan bulat positif dan  $G$  = himpunan bilangan bulat negatif merupakan dua himpunan yang saling lepas, karena kedua himpunan itu tidak mempunyai elemen yang sama.
2. Ditentukan  $V = \{1, 3, 5\}$  dan  $W = \{2, 3, 4\}$ . Maka  $V$  dan  $W$  tidak saling lepas, karena kedua himpunan itu mempunyai anggota persekutuan, yaitu 3.

### 3. Operasi Pada Himpunan

#### a. Gabungan

##### **Definisi 1.5**

---

Gabungan himpunan  $A$  dan  $B$  (ditulis  $A \cup B$ ) adalah himpunan semua anggota  $A$  atau semua anggota  $B$  atau anggota kedua-duanya (dibaca  $A$  gabungan  $B$ ).

$A$  gabungan  $B$  dapat juga didefinisikan sebagai:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

##### **Contoh 1.10**

---

- 1) Jika  $P = \{1, 2, 3\}$  dan  $Q = \{a, b, c, d\}$  maka  $P \cup Q = \{1, 2, 3, a, b, c, d\}$
- 2) Ditentukan  $C = \{0\}$  dan  $D =$  himpunan bilangan bulat positif. Maka  $C \cup D =$  himpunan bilangan cacah.

#### b. Irisan

##### **Definisi 1.6**

---

Irisan dari himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  (ditulis  $A \cap B$ ) adalah himpunan dari anggota persekutuan  $A$  dan himpunan  $B$  (dengan kata lain, himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota  $A$  dan anggota  $B$ ) dibaca  $A$  irisan  $B$ .

$A$  irisan  $B$  dapat didefinisikan sebagai:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

##### **Contoh 1.11**

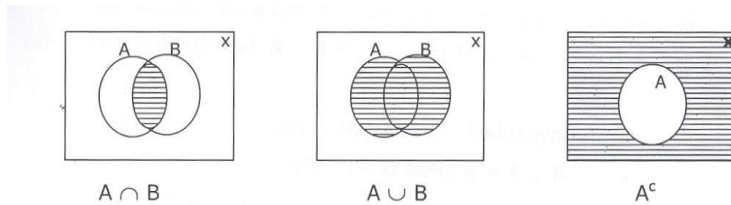
---

1. Ditentukan  $A = \{p, o, t, r, e, t\}$  dan  $B = \{t, a, p, e\}$ . Maka  $A \cap B = \{p, t, e\}$
2. Jika  $M = \{\text{bilangan asli kelipatan } 2\}$  dan  $N = \{\text{bilangan asli kelipatan } 3\}$  maka  $M \cap N = M \cap N = \{6, 12, 18, \dots\}$
3. Jika  $C =$  himpunan bilangan cacah dan  $D = \{x | 2x^2 + 5x = 3\}$  maka  $C \cap D = \emptyset$ .

### c. Komplemen

#### **Definisi 1.7**

Komplemen suatu himpunan  $A$  (ditulis  $A^c$  atau  $A^c$ ) adalah himpunan anggota-anggota di dalam semesta pembicaraan yang bukan anggota  $A$ .



**Gambar 1.2 Diagram Venn Satu Gabungan, Irisan dan Komplemen**

#### **Contoh 1.12**

1. Ditentukan  $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  di dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan cacah. Maka  $E^c = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ .
2. Semesta pembicaraan  $S = \{i, n, d, o, n, e, s, i, a\}$  dan  $X = \{v, o, k, a, l\}$  maka  $X^c = \{n, d, s\}$
3. Jika  $K = \{x | x > 0, x \text{ bilangan real}\}$  maka  $K^c = \{x | x < 0, x \text{ bilangan real}\}$ .

### d. Selisih Dua Himpunan (*Difference*)

#### **Definisi 1.8**

Selisih dua himpunan  $A$  dan  $B$  sama dengan irisan  $A$  dan  $B^c$ :  $A - B = A \cap B^c$ .

#### **Contoh 1.13**

1. Diketahui  $A = \{\text{abjad latin}\}$  dan  $B = \{\text{vocal}\}$  maka  $A - B = \{\text{konsonan}\}$
2. Jika  $P = \{1, 2, 3, 4\}$  dan  $Q = \{2, 5, 6, 4, 7\}$  maka  $P - Q = \{1, 3\}$

3.  $X = \{\text{bilangan real positif}\}$  dan  $Y = \{\text{bilangan real negatif}\}$ . Maka  $X - Y = X$

Berdasarkan pengertian di atas, maka definisi dari selisih dua himpunan A dan B dapat juga di tulis sebagai berikut:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\} = \{x | x \in A, x \in B^c\} \text{ atau } A \cap B^c.$$

#### 4. Sifat-sifat Operasi

Jika A, B, dan C adalah himpunan bagian dari X, maka:

(a). Idempoten

a.  $A \cup A = A$

b.  $A \cap A = A$

(b). Identitas:

a.  $A \cup U = U; A \cup \phi = A$

b.  $A \cap U = A; A \cap \phi = \phi$

(c). Komutatif:

a.  $A \cup B = B \cup A$

b.  $A \cap B = B \cap A$

(d). Asosiatif:

a.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e). Distributif:

a.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f). De Morgan:

a.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

b.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

**Bukti:**

$$(c). A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$

(e). Misalkan  $x$  elemen sebarang dari  $A \cup (B \cap C)$ , maka  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \{x \in B \wedge x \in C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in A \vee x \in B\} \wedge \{x \in A \vee x \in C\}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{Akibatnya, } A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Dan

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Oleh karena itu,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

(f). a. Jika  $x$  elemen sebarang dari  $(A \cup B)^c$ , maka

$$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B.$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$$

$$\text{Selanjutnya, } (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$$

$$\text{dan } A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$$

$$\text{oleh karena itu } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

### ***Teorema 1.9***

Untuk sebarang tiga himpunan A, B, dan C diperoleh :

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

#### **Bukti :**

1. Akan dibuktikan  $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- a. Ambil  $x \in A \cup (B \cap C)$

Maka  $x \in A$  atau  $(x \in B \cap C)$

$x \in A$  atau  $(x \in B \text{ dan } x \in C)$

$(x \in A \text{ atau } x \in B) \text{ dan } (x \in A \text{ atau } x \in C)$

$x \in A \cup B \text{ dan } x \in A \cup C$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

jadi  $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- b.  $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Ambil  $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(y \in A \text{ atau } y \in B) \text{ dan } (y \in A \text{ atau } y \in C)$

$y \in A \text{ atau } (y \in B \text{ dan } y \in C)$

$y \in A \text{ atau } y \in B \cap C$

$y \in A \cup (B \cap C)$

jadi  $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

dari a dan b diperoleh  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Yang dibuktikan dari  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  adalah :

- a.  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Misalkan  $x \in A$  dan  $x \in B \cup C$

$x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A$  dan  $x \in (B \cup C)$

$x \in A$  dan  $\{x \in B \text{ atau } x \in C\}$

$$\{x \in A \text{ dan } x \in B\} \text{ atau } \{x \in A \text{ dan } x \in C\}$$

$$x \in (A \cap B) \text{ atau } x \in (A \cap C)$$

$$x \in (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

$$\text{sehingga } A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

b.  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Misalkan  $x \in A$  dan  $x \in B, x \in C$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \text{ atau } x \in (A \cap C)$$

$$\{x \in A \text{ dan } x \in B\} \text{ atau } \{x \in A \text{ dan } x \in C\}$$

$$x \in A \text{ dan } \{x \in B \text{ dan } x \in C\}$$

$$x \in A \text{ dan } x \in (B \cup C)$$

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\text{sehingga } (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

Dari persamaan a dan b, terbukti bahwa  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

### ***Definisi 1.10***

Untuk sebarang dua himpunan A dan B diperoleh :

(i)  $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

(ii)  $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

Bukti :

(i) Harus dibuktikan  $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$  dan  $A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$

a.  $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$

Misalkan  $x \in A$  dan  $x \in B$ , maka  $x \in A \cap B$

$A \subseteq A \cap B$  dan  $A \cap B \subseteq B$ , maka  $A = A \cap B$

b.  $A \cap B = A \rightarrow A \subseteq B$

Misalkan  $x \in A$  dan  $x \in B$ , maka  $x \in$  keduanya

$x \in A \cap B = A$  maka  $A \cap B \subseteq B$  sehingga  $A \subseteq B$

dari persamaan a dan b, terbukti bahwa  $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

(ii) Harus dibuktikan bahwa  $A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B$  dan  $A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$

a.  $A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B$

Misalkan  $x \in A$  atau  $x \in B$ , maka  $x \in$  keduanya

$x \in A \cup B$ ,  $x \in A$  atau  $x \in B$  maka  $B = A \cup B$

b.  $A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$

Misalkan  $x \in A$  dan  $x \in B$ , maka  $x \in$  keduanya

$x \in A \cup B = B$  maka  $A \cup B \subseteq B$  sehingga  $A \subseteq B$

dari persamaan a dan b, terbukti bahwa  $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ .

### C. Pemetaan

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan yang tidak kosong. Hasil kali silang (hasil kali Cartesius) dari himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  ditulis " $A \times B$ " didefinisikan sebagai berikut:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

Dengan perkataan lain,  $A \times B$  adalah himpunan dari semua pasangan terurut dengan komponen pertama diambil elemen dari  $A$  dan komponen kedua diambil elemen dari  $B$ .

#### **Contoh 1.14**

Misalkan  $A = \{1, 2, 3\}$  dan  $B = \{a, b\}$ , sehingga

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$  sedangkan

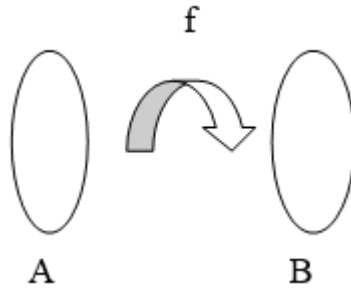
$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$

Salah satu konsep yang penting dalam setiap cabang matematika adalah pemetaan atau fungsi. Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan atau mengaitkan setiap elemen dari himpunan  $A$  dengan tepat satu elemen

dari himpunan B, disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B. Misalkan cara atau aturan yang mengaitkan tersebut disimbolkan dengan  $f$ , maka dikatakan bahwa  $f$  adalah pemetaan dari A ke B dan dilambangkan sebagai

$$f: A \rightarrow B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B$$

dibaca :”fungsi  $f$  dari A ke B” atau  $f$  adalah pemetaan dari A ke B. Pemetaan  $f$  ini dapat dilukiskan dengan diagram seperti gambar berikut:



**Gambar 1.3 fungsi  $f$  dari A ke B**

Selanjutnya himpunan  $A$  disebut daerah asal (domain) dari  $f$ , dan  $B$  disebut daerah kawan (kodomain) dari  $f$ . Apabila  $a \in A$  maka suatu elemen dari  $B$  yang merupakan pasangan dari  $a$  disebut peta (bayangan atau image) dari  $a$  dan dinyatakan dengan simbol  $f(a)$ .

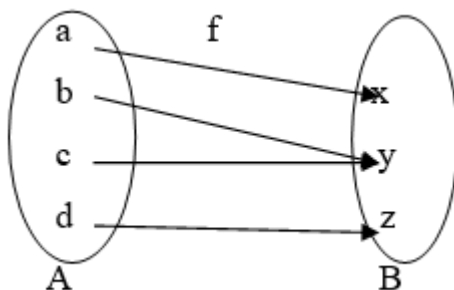
### ***Definisi 1.11 (Definisi Fungsi)***

Misalkan  $A$  dan  $B$  dua buah himpunan tidak kosong, fungsi  $f$  dari  $A$  ke  $B$  adalah suatu relasi yang mengaitkan setiap anggota  $a \in A$  dengan hanya satu pasangan yang dinyatakan dengan  $f(a)$  di  $B$ , dan ditulis  $f: A \rightarrow B$  dengan  $f$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$ .

### Contoh 1.15

Misalkan  $A = \{a, b, c, d\}$  dan  $B = \{x, y, z\}$

Misalkan  $f: A \rightarrow B$  didefinisikan seperti pada diagram berikut ini:



Gambar 1.4 Gambaran  $f: A \rightarrow B$

Pada pemetaan ini dapat dikatakan bahwa  $f(a) = x$ ,  $f(b) = x$ ,  $f(c) = y$ , dan  $f(d) = z$ . Pemetaan  $f$  ini dapat pula ditulis sebagai himpunan pasangan terurut

$$f = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, z)\}$$

Perlu diperhatikan bahwa setiap elemen dari  $A$  harus dipasangkan dengan tepat satu elemen dari  $B$ . Berarti tidak ada elemen dari  $A$  yang tidak berpasangan dan tidak ada elemen dari  $A$  yang dipasangkan dengan lebih dari satu elemen dari  $B$ . Tetapi satu elemen dari  $B$  boleh mempunyai pasangan lebih dari satu elemen dari  $A$  atau boleh tidak memperoleh pasangan elemen dari  $A$ .

### Teorema 1.12

Jika  $f: S \rightarrow T$  suatu pemetaan dan  $A, B \subset S$ , maka

- (i)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- (ii)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (iii) Jika  $A \subset B$  maka  $f(A) \subset f(B)$

**Bukti:**

- (i) Ambil sebarang  $y \in f(A \cap B)$ , maka ada  $x \in A \cap B$  sedemikian hingga  $y = f(x)$ . Karena  $x \in A \cap B$ , maka  $x \in A$  dan  $x \in B$  sehinggalah  $f(x) \in f(A)$  dan  $f(x) \in f(B)$ . Berarti  $f(x) \in f(A) \cap f(B)$ . Karena  $y = f(x)$ , maka  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Jadi jika  $y \in f(A \cap B)$  maka  $y \in f(A) \cap f(B)$ , sehingga  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .
- (ii) Kita harus membuktikan kesamaan dua himpunan, sehingga pada (ii) kita harus menunjukkan bahwa  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$  dan  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ . Ambil sebarang  $y \in f(A \cup B)$ , maka  $x \in A \cup B$  sedemikian sehingga  $y = f(x)$ . Karena  $x \in A \cup B$ , maka  $x \in A$  atau  $x \in B$  sehingga  $f(x) \in f(A)$  atau  $f(x) \in f(B)$ . Hal ini berarti  $f(x) \in f(A) \cup f(B)$ . Karena  $y = f(x)$ , maka  $y \in f(A) \cup f(B)$ . Jadi jika  $y \in f(A \cup B)$  maka  $y \in f(A) \cup f(B)$ . Berarti  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ .
- Sebaliknya, diambil sebarang  $t \in f(A) \cup f(B)$ . Maka  $t \in f(A)$  atau  $t \in f(B)$ .
- Jika  $t \in f(A)$ , maka ada  $s \in A$  sehingga  $t = f(s)$
- Jika  $t \in f(B)$ , maka ada  $r \in B$  sehingga  $t = f(r)$
- Karena  $s \in A$  dan  $r \in B$  maka  $s, r \in A \cup B$  sehingga  $f(s), f(r) \in f(A \cup B)$ . Karena  $t = f(s) = f(r)$ , maka  $t \in f(A \cup B)$ . Jadi jika  $t \in f(A) \cup f(B)$  maka  $t \in f(A \cup B)$ . Berarti  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ . Terbukti bahwa  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ .
- (iii) Sebagai latihan

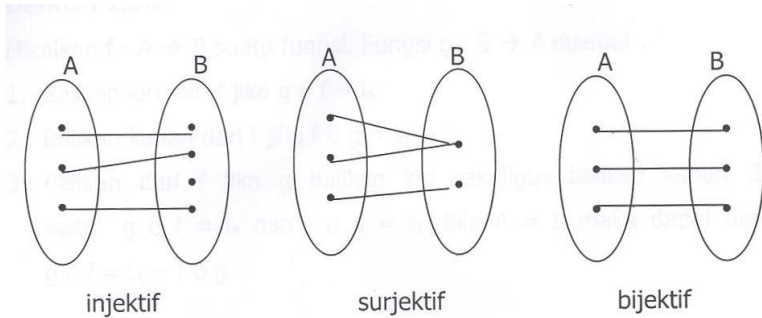
**Definisi 1.13**


---

Misalkan  $f: A \rightarrow B$  suatu fungsi

- a)  $f$  dikatakan fungsi satu-satu jika  $\forall x, y \in A$  dengan  $f(x) = f(y)$  maka  $x = y$

- b)  $f$  dikatakan fungsi onto jika  $\forall b \in B$ , ada  $a \in A$  sehingga  $f(a) = b$
- c) Jika  $f$  fungsi satu-satu dan onto maka  $f$  dikatakan fungsi bijektif.



**Gambar 1.5 Pemetaan injektif, surjektif dan bijektif**

### **Contoh 1.16**

- a.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dengan  $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$  adalah fungsi satu-satu.
- b.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dengan  $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$  adalah fungsi onto.
- c.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  dengan  $f(z) = z, \forall z \in \mathbb{Z}$  adalah fungsi bijektif.

## **D. Relasi Ekuivalen**

Suatu relasi  $T$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah himpunan bagian dari  $A \times B$ . Bila pasangan  $(a,b)$  merupakan anggota dari  $T$ , maka  $a$  berelasi dengan  $b$ , dan ditulis sebagai  $aTb$ . Bila  $(a,b)$  bukan merupakan anggota dari  $T$ , maka  $a$  tidak berelasi dengan  $b$ , dan ditulis  $a \nVdash b$ .

Relasi-relasi dalam kehidupan sehari-hari misalnya “*orang tua dari*”, “*lebih pintar dari*”, “*berasal dari daerah yang sama*”. Sedangkan relasi-relasi dalam matematika misalnya “*sama dengan*”, “*adalah anggota dari*” dan

“sebangun”. Suatu relasi  $T$  dari  $A$  ke  $B$  mempunyai sifat bahwa untuk suatu unsur  $a \in A$  dan  $b \in B$ , maka  $aTb$  atau  $a \nabla b$ .

Suatu fungsi  $f: A \rightarrow B$  menunjukkan suatu relasi  $T$  dari  $A$  ke  $B$  yang memberikan  $aTb$  yang artinya  $f(a) = b$ . Himpunan bagian  $T$  dari  $A \times B$  adalah grafik dari fungsi tersebut. Dengan demikian maka relasi-relasi adalah keadaan yang umum daripada fungsi-fungsi. Satu unsur dapat berelasi dengan beberapa unsur atau tidak berelasi sama sekali.

Suatu relasi dari himpunan  $A$  ke  $A$  sendiri disebut relasi pada  $A$ . Suatu terurut parsial pada suatu himpunan, misalnya “ $\leq$ ” pada himpunan bilangan-bilangan real, atau “*himpunan bagian dari* ( $\subseteq$ )” pada suatu himpunan kuasa  $P(X)$  adalah relasi pada himpunan-himpunan tersebut. “*sama dengan* ( $=$ )” adalah relasi pada suatu himpunan  $S$  dan didefinisikan oleh himpunan bagian  $\{(a,a), a \in A\}$  dari  $A \times A$ . Suatu relasi ekuivalen adalah relasi yang mempunyai beberapa sifat yang harus dipenuhi, seperti dalam definisi berikut:

### ***Definisi 1.14***

Suatu relasi  $T$  pada himpunan  $A$  disebut relasi ekuivalen bila memenuhi sifat-sifat berikut:

- a.  $aTa$  berlaku  $\forall a \in A$  (Sifat Refleksi)
- b.  $aTb$  maka  $bTa$  berlaku  $\forall a, b \in A$  (Sifat Simetri)
- c.  $aTb$  dan  $bTc$ , maka  $aTc$  berlaku  $\forall a, b, c \in A$  (Sifat Transitif)

Bila  $T$  adalah suatu relasi ekuivalen pada himpunan  $A$  dan  $a \in A$ , maka  $[a] = \{x \in A \mid xTa\}$  disebut kelas ekuivalen yang memuat  $a$ . Himpunan dari semua kelas ekuivalen disebut himpunan faktor dari  $A$  oleh  $T$ , dan ditulis  $A/T$ .

Jadi,

$$A/T = \{[a] \mid a \in A\}$$

Suatu koleksi dari himpunan-himpunan bagian tak kosong disebut partisi dari himpunan  $A$  bila gabungan dari himpunan-himpunan bagian tersebut adalah  $A$  dan sebarang dua himpunan bagian tersebut adalah lepas.

### **Contoh 1.17**

Misalkan  $n$  adalah bilangan bulat positif,  $a$  dan  $b$  adalah bilangan-bilangan bulat. Kita katakan bahwa  $a$  kongruen dengan  $b$  modulo  $n$ , bila  $n$  membagi  $a - b$ , yang ditulis:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Himpunan dari kelas-kelas ekuivalen tersebut disebut himpunan dari bilangan-bilangan bulat modulo  $n$  dan ditulis dengan  $Z_n$ . Tunjukkan bahwa relasi kongruen modulo  $n$  adalah suatu relasi ekuivalen pada himpunan bilangan bulat  $Z$ .

### **Penyelesaian:**

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ bila hanya bila } n \mid (a - b)$$

a. Sifat Refleksi

$$\forall a \in Z$$

Jika  $n \mid (a - a)$ , ini berarti  $a \equiv a \pmod{n}$ , sehingga  $aTa$

b. Sifat Simetris

$$\forall a, b \in Z$$

Jika  $n \mid (a - b)$ , ini berarti  $a \equiv b \pmod{n}$ , sehingga  $aTb$

Jika  $n \mid -(a - b) = n \mid (b - a)$ , ini berarti  $b \equiv a \pmod{n}$ , sehingga  $bTa$

Jadi bila  $aTb$  maka  $bTa$

c. Sifat Transitif

$$\forall a, b, c \in Z$$

Jika  $n \mid (a - b)$ , ini berarti  $a \equiv b \pmod{n}$ , sehingga  $aTb$

Jika  $n \mid (b - c)$ , ini berarti  $b \equiv c \pmod{n}$ , sehingga  $bTc$

Jika  $n \mid (a - b) + (b - a) = n \mid (a - c)$ , ini berarti  $a \equiv c \pmod{n}$ , sehingga  $aTc$

Jadi, bila  $aTb$  dan  $bTc$ , maka  $aTc$

Jadi kongruensi modulo  $n$  adalah suatu relasi ekuivalen pada himpunan  $\mathbb{Z}$ .

Di dalam relasi kongruensi modulo 2, mempunyai kelas-kelas ekuivalen sebagai berikut:

$$[0] = \{\dots, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\} \quad [2] = \{\dots, 0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]$$

$$[1] = \{\dots, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\} \quad [3] = \{\dots, 1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]$$

Suatu kelas ekuivalen pada bilangan bulat modulo 2 haruslah satu diantara  $[0]$  atau  $[1]$ ,  $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$

Suatu kelas ekuivalen pada bilangan bulat modulo  $n$  adalah  $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$  merupakan kongruen  $n$  dengan sisa pembagian  $n$ .

Salah satu himpunan dari kelas-kelas ekuivalen yang termasuk ke dalam kelas sederhana (dasar) adalah himpunan bilangan-bilangan rasional, misalkan  $\frac{1}{2}$  dan  $\frac{2}{4}$  merupakan bilangan rasional yang sama.

Pada konsep dari kelas ekuivalen didefinisikan relasi  $T$  pada  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  (dengan  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ) oleh  $(a,b)T(c,d)$  bila dan hanya bila  $ad = bc$ . Relasi tersebut adalah relasi ekuivalen pada  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  tersebut disebut bilangan rasional. Relasi ekuivalen tersebut ditulis  $[(a, b)]$  oleh  $\frac{a}{b}$ . Jadi

$$(1,2)T(2,4), \text{ maka } \frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

## E. Sifat-sifat Operasi Biner

### ***Definisi 1.15***

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan sebarang tak kosong, maka pemetaan  $S \times S \rightarrow S$  disebut operasi biner.

Misalkan  $f$  suatu operasi biner dalam  $S$ , yaitu suatu pemetaan dari  $S \times S$  ke  $S$ , dan misalkan  $(a,b) \in S \times S$  dengan  $f(a,b) \in c$ , maka ditulis  $a * b = c$  (dibaca  $a$  operasi biner  $b$  sama dengan  $c$ . jadi sesuai dengan konsep pemetaan, sesungguhnya pasangan terurut  $(a,b) \in S \times S$  dikaitkan dengan  $c$ , yang dinotasikan dengan  $(a,b) \rightarrow c$ .

### ***Definisi 1.16***

Suatu operasi biner  $*$  dan  $\circ$  pada himpunan tidak kosong  $G$  dikatakan:

- (i) Asosiatif, jika  $(a*b)*c = a*(b*c)$ ,  $\forall a, b, c \in G$
- (ii) Komutatif, jika  $a*b = b*a$ ,  $\forall a, b \in G$
- (iii) Mempunyai unsur identitas, jika ada  $e \in G$ , sehingga  $e*a = a*e = a \quad \forall a \in G$
- (iv) Setiap anggota mempunyai invers di  $G$ , jika  $\forall a \in G$  ada  $a^{-1} \in G$  sehingga  $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$
- (v) Operasi  $*$  pada  $G$  dikatakan memenuhi hukum pencoretan kiri, jika  $a*b = a*c$  mengakibatkan  $b = c$  untuk setiap  $a, b, c \in G$
- (vi) Operasi  $*$  pada  $G$  dikatakan memenuhi hukum pencoretan kanan, jika  $b*a = c*a$ , mengakibatkan  $b = c$ , untuk setiap  $a, b, c \in G$
- (vii) Anggota  $e \in G$  dikatakan identitas kiri di  $G$ , jika  $e*a = a$ ,  $\forall a \in G$
- (viii) Jika  $e$  identitas kanan di  $G$ , jika  $a*e = a \quad \forall a \in G$ . Dan jika  $b \in G$ , dikatakan invers kanan dari  $a \in G$ , jika  $a*b = e$
- (ix) Operasi  $\circ$  dikatakan distributif kiri terhadap  $*$  jika  $a \circ (b*c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ ,  $\forall a, b, c \in G$
- (x) Operasi  $\circ$  dikatakan distributif kanan terhadap  $*$  jika  $(a*b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$ ,  $\forall a, b, c \in G$ .

### ***Definisi 1.17***

Suatu himpunan tidak kosong  $G$  dengan satu atau lebih operasi biner pada  $G$  dikatakan struktur aljabar, atau sistem aljabar dan ditulis  $(G, *)$ .

Misalkan  $S$  suatu himpunan yang dilengkapi dengan sekelompok operasi biner  $*$  dan  $\circ$ , maka  $S$  menjadi satu struktur aljabar dengan dua operasi biner yang dinotasikan  $(S, *, \circ)$  atau  $(S, \circ, *)$

### ***Contoh 1.18***

Himpunan semua bilangan bulat  $Z$  terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan suatu struktur aljabar, yang dinotasikan dengan  $(Z, *, +)$

### ***Definisi 1.18***

Grupoid adalah suatu struktur aljabar yang mempelajari hanya satu operasi biner (terhadap penjumlahan atau perkalian).

### ***Contoh 1.19***

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan tak kosong didefinisikan  $x \cdot y = y$  untuk setiap  $x, y \in S$ , maka  $(S, \cdot)$  adalah merupakan sebuah grupoid.

### ***Contoh 1.17***

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan tak kosong, didefinisikan  $x + y = y$  untuk setiap  $x, y \in S$ , maka  $(S, +)$  adalah merupakan grupoid

## F. Latihan

---

1. Jika  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  dan  $C = \{2, 4, 5, 7\}$   
Tunjukkan bahwa  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. Jika  $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  dan  $C = \{1, 2, 5, 9\}$   
Tentukanlah  $A - B - C$
3. Buktikan bahwa  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Dengan menggunakan relasi ekuivalen. Tunjukkan bahwa :
  - a.  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$
  - b.  $\frac{10}{2} = 5$
  - c.  $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$
5. Misalkan suatu himpunan yang tak kosong  $Z^+$  adalah himpunan bilangan bulat positif didefinisikan  $x * y = |x - y|$  bila  $x \neq y$  dan  $y * y = y$  untuk setiap  $x, y \in Z^+$ . Tunjukan apakah operasi binernya tertutup, komutatif dan asosiatif!
6. Misalkan suatu himpunan yang tak kosong  $S = \{a, b, c, d\}$ , didefinisikan  $x * y = y$  untuk setiap  $x, t \in S$  adalah suatu operasi biner dalam  $S$ . Tunjukan operasi biner dari himpunan tersebut!



## BAB II

# TEORI RING

---

### A. Sifat-sifat Ring

---

Pada buku sebelumnya telah dibahas konsep grup yaitu suatu struktur aljabar dengan satu operasi biner pada operasi penjumlahan dan perkalian dengan syarat yaitu sifat tertutup dan asosiatif, memiliki identitas, dan memiliki invers.

Misalkan pandang suatu bilangan bulat  $Z$  sebagai suatu grup  $(Z, +)$  dan himpunan bilangan bulat yang tidak sama dengan nol  $Z'$  sebagai monoid  $(Z', \cdot)$ , tetapi kedua struktur tersebut mengabaikan relasi antara penjumlahan  $(+)$  dan perkalian  $(\cdot)$ , misalkan diketahui bahwa perkalian tersebut memenuhi sifat distributif terhadap penjumlahan. Pada bagian ini akan dibahas mengenai struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu terhadap penjumlahan dan perkalian, struktur aljabar ini disebut dengan Ring (Gelanggang)

Berikut ini diberikan definisi ring yaitu:

#### ***Definisi 2.1***

---

Suatu Ring  $(R, +, \cdot)$  adalah suatu himpunan tak kosong  $R$  dengan operasi biner penjumlahan  $(+)$  dan perkalian  $(\cdot)$  pada  $R$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Tertutup terhadap penjumlahan  
Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah anggota  $R$ ,  
Maka  $a$  dan  $b$  tertutup bila  $a + b \in R$
2. Asosiatif terhadap penjumlahan  
Misalkan  $a, b, c \in R$   
Maka  $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Adanya unsur satuan atau identitas terhadap penjumlahan  
Misalkan  $a \in R$

- Maka  $a + e = e + a = a$
4. Adanya unsur balikan atau invers terhadap penjumlahan  
Misalkan  $a \in R$   
Maka  $a + (-a) = (-a) + a = e$
  5. Komutatif terhadap penjumlahan  
Misalkan  $a, b \in R$   
Maka  $a + b = b + a$
  6. Tertutup terhadap penjumlahan  
Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah anggota  $R$ ,  
Maka  $a$  dan  $b$  tertutup bila  $a \cdot b \in R$
  7. Asosiatif terhadap perkalian  
Misalkan  $a, b, c \in R$   
Maka  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  8. Adanya unsur satuan atau identitas terhadap perkalian  
Misalkan  $a \in R$   
Maka  $a \cdot e = e \cdot a = a$
  9. Distributif perkalian ( $\cdot$ ) terhadap penjumlahan( $+$ )  
Misalkan  $a, b, c \in R$   
Maka  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  dan  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner  $(R, + \cdot)$  dikatakan suatu Ring (Gelanggang) bila:

1.  $(R, +)$  merupakan suatu Grup komutatif
2.  $(R, \cdot)$  merupakan suatu Semigrup/Monoid  
(catatan : Beberapa penulis buku mengatakan bahwa di dalam suatu Ring tidak perlu mempunyai identitas terhadap perkalian)
3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

### Contoh 2.1

Tunjukan bahwa  $Z_4$  adalah merupakan Ring.

**Penyelesaian:**

**Tabel 2.1 Daftar Cayley ( $Z_4, +$ ) dan ( $Z_4, \cdot$ )-0**

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| . | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

Dari tabel 2.1 akan ditunjukkan bahwa  $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  merupakan suatu Ring bila memenuhi:

**1. Grup Komutatif terhadap penjumlahan ( $Z_4, +$ )**

- Tertutup

Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$

Misalkan  $0, 1, 2, 3 \in Z_4$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 3 = 0$$

Karena hasilnya  $0, 1, 2, 3 \in Z_4$  maka tertutup terhadap  $Z_4$

- Asosiatif

Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$

Misalkan  $a = 2, b = 1$  dan  $c = 3 \in Z_4$

$$(a + b) + c = (2 + 1) + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$a + (b + c) = 2 + (1 + 3) = 2 + 4 = 6$$

sehingga:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = 6$$

Maka  $Z_4$  asosiatif

- Adanya unsur satuan atau identitas

Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$

- Misalkan  $0 \in Z_4$   
 $0 + e = e + 0 = 0$
- Misalkan  $1 \in Z_4$   
 $1 + e = e + 1 = 1$
- Misalkan  $2 \in Z_4$   
 $2 + e = e + 2 = 2$
- Misalkan  $3 \in Z_4$   
 $3 + e = e + 3 = 3$

Maka  $Z_4$  ada unsur satuan atau identitas

- Adanya unsur balikan atau invers

- Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$ , misalkan  $0 \in Z_4$ , pilih  $0 \in Z_4$  sehingga  
 $0 + 0 = 0 = e$ , maka  $(0)^{-1} = 0$
- Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$ , misalkan  $1 \in Z_4$ , pilih  $3 \in Z_4$  sehingga  
 $1 + 3 = 0 = e$ , maka  $(1)^{-1} = 3$
- Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$ , misalkan  $2 \in Z_4$ , pilih  $2 \in Z_4$  sehingga  
 $2 + 2 = 0 = e$ , maka  $(2)^{-1} = 2$
- Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$ , misalkan  $3 \in Z_4$ , pilih  $1 \in Z_4$  sehingga  
 $3 + 1 = 0 = e$ , maka  $(3)^{-1} = 1$

Maka  $Z_4$  ada unsur balikan atau invers

- Komutatif

Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$

Misalkan  $a = 2, b = 3 \in Z_4$

$$(a + b) = (2 + 3) = 1$$

$$(b + a) = (3 + 2) = 1$$

Sehingga:

$$(a + b) = (b + a) = 1$$

Maka  $Z_4$  komutatif

Jadi,  $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  merupakan Grup Komutatif terhadap penjumlahan  $(Z_4, +)$ .

## 2. Semigrup terhadap perkalian $(Z_4, \cdot)$

- Tertutup

Ambil sebarang nilai  $Z_4$

misalkan  $0, 1, 2, 3, \in Z_4$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

Karena hasilnya  $0, 1, 2, 3 \in Z_4$ , maka tertutup terhadap  $Z_4$

- Asosiatif

Ambil sebarang nilai  $Z_4$

Misalkan  $a = 2, b = 1$  dan  $c = 3 \in Z_4$

$$(a \cdot b) \cdot c = (2 \cdot 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 2$$

$$a \cdot (b \cdot c) = 2 \cdot (1 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 2$$

sehingga :

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = 2$$

Maka  $Z_4$  asosiatif

Jadi,  $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  merupakan Semigrup terhadap Perkalian  $(Z_4, \cdot)$

## 3. Distribusi perkalian terhadap penjumlahan

Ambil sebarang nilai dari  $Z_4$

Misalkan  $a = 2, b = 1$  dan  $c = 2 \in Z_4$

$$a \cdot (b + c) = 2 \cdot (1 + 3)$$

$$= 2 \cdot (0)$$

$$\begin{aligned}
&= 0 \\
(a \cdot b) + (a \cdot c) &= (2 \cdot 1) + (2 \cdot 3) \\
&= 2 + 2 \\
&= 0 \\
\text{maka, } a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) = 0 \\
(a + b) \cdot c &= (2 + 1) \cdot 3 \\
&= (3) \cdot 3 = 2 + 3 \\
&= 1 \\
(a \cdot c) + (b \cdot c) &= (2 \cdot 3) + (1 \cdot 3) \\
&= (2 + 3) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\text{maka, } (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = 1$$

Jadi,  $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  distribusi perkalian terhadap penjumlahan

Karena  $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka  $Z_4$  adalah suatu Ring  $(Z_4, +, \cdot)$ .

### ***Contoh 2.2***

Misalkan  $R = \{-1, 1\}$ ,  $(R, +, \cdot)$  bukan merupakan suatu Ring karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan.

### ***Contoh 2.3***

Misalkan  $R = \{0, 1\}$ ,  $(R, +, \cdot)$  bukan merupakan suatu Ring karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan, tetapi  $Z_2 = \{0, 1\}$ ,  $(Z_2, +, \cdot)$  merupakan suatu Ring karena tertutup terhadap operasi penjumlahan dan memenuhi sifat-sifat dari Ring.

### ***Definisi 2.2***

Suatu Ring dikatakan komutatif/abelian bila operasi perkalian (multifikasi) terpenuhi sifat komulatif. Secara singkat akan dijelaskan syarat dari Ring Komutatif pada definisi berikut :