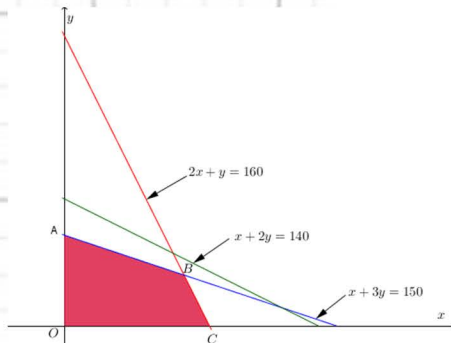


BUKU AJAR

PROGRAM LINEAR

$(0, 48)$

$(12, 36)$



Yoni Sunaryo, S.Pd., M.Pd.
Sri Solihah, S.Pd., M.Pd.
Lia Yulisma, S.Pd., M.Si.

Bahan Ajar

Pemrograman Linear

Bahan Ajar Pemrograman Linear

Yoni Sunaryo, S.Pd., M.Pd.

Sri Solihah, S.Pd., M.Pd.

Lia Yulisma, S.Pd., M.Si.



Bahan Ajar Pemrograman Linear

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Yoni Sunaryo, S.Pd., M.Pd.

Sri Solihah, S.Pd., M.Pd.

Lia Yulisma, S.Pd., M.Si.

Editor: Rusli

Cetakan Pertama: Oktober 2023

Cover: Tim Penyusun

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2023, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2023 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2023

Dimensi : 14,8 x 21 cm

ISBN 978-623-448-668-1

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penyusun panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala limpahan rahmat-Nya, sehingga bahan ajar Program Linear untuk ini dapat diselesaikan dengan lancar. Penulis menyadari tanpa bantuan dari berbagai pihak, bahan ajar ini tidak akan dapat diselesaikan dengan baik. Oleh karena itu pada kesempatan ini, perkenankan sebagai penyusun bahan ajar menyampaikan ucapan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah memberikan sumbangsih tenaga dan pemikiran sehingga bahan ajar ini dapat diselesaikan.

Bahan ajar Program Linear ini membahas materi sebagai berikut:

1. Perumusan Program Linear
2. Metode Grafik dengan Metode Titik Ekstrim
3. Metode Grafik dengan Metode Garis Selidik
4. Metode Aljabar

Penulis menyadari bahan ajar ini masih memiliki kelemahan, oleh karena itu kritik dan saran dari pengguna bahan ajar ini senantiasa penyusun harapkan dan untuk itu kami mengucapkan banyak terima kasih.

Ciamis, Desember 2022
Penyusun,

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
BAB I PERUMUSAN PROGRAM LINEAR.....	1
A. Pendahuluan	1
B. Pengertian dan Sejarah Program Linear	2
C. Bentuk Umum Program Linear	4
D. Persoalan Optimasi dan Persoalan <i>Programming</i>	5
E. Formulasi Model Matematika.....	7
F. Rangkuman.....	21
BAB II METODE GRAFIK DENGAN METODE TITIK EKSTRIM	27
A. Pendahuluan	27
B. Pengertian Metode Grafik	28
C. Masalah Maksimisasi.....	30
D. Masalah Minimisasi.....	32
E. Penyelesaian dengan Metode Titik Ekstrim	33
G. Rangkuman.....	51
BAB III METODE GRAFIK DENGAN METODE GARIS SELIDIK.....	57
A. Pendahuluan	57
B. Pengertian Metode Garis Selidik	58
C. Penyelesaian dengan Metode Garis Selidik.....	58
D. Rangkuman.....	80

BAB IV METODE ALJABAR.....	86
A. Pendahuluan.....	86
B. Pengertian Metode Aljabar	86
C. Menentukan Banyak Persamaan.....	88
D. Rangkuman	108
DAFTAR PUSTAKA.....	112

BAB I

PERUMUSAN PROGRAM LINEAR

A. Pendahuluan

Bahan ajar Kegiatan Belajar 1 program linear ini membahas mengenai perumusan program linear. Setelah mempelajari bahan ajar kegiatan belajar 1 perumusan program linear ini diharapkan mahasiswa siap untuk mempelajari materi di bahan ajar kegiatan belajar berikutnya.

Kompetensi ini penting untuk dimiliki oleh individu yang berkecimpung di dunia Pendidikan matematika dikarenakan materi ini menjadi materi yang wajib dipelajari oleh siswa atau mahasiswa. Selain dari itu, materi ini juga penting bagi individu yang berwirausaha karena dapat memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan biaya produksi. Oleh karena itu, pemahaman tentang konsep perumusan program linear menjadi sesuatu yang penting.

Mahasiswa diminta untuk mempelajari uraian materi yang dijabarkan pada bahan ajar ini. Mahasiswa diharapkan dapat berfokus pada cara perumusan program linear yang berasal dari permasalahan kontekstual. Setelah mempelajari materi, mahasiswa dapat menguji pemahaman mereka dengan mengerjakan tes formatif yang tersedia.

B. Pengertian dan Sejarah Program Linear

Program linear merupakan suatu metode matematika yang digunakan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan optimasi linear (nilai maksimum dan nilai minimum). Permasalahan yang berhubungan dengan program linear selalu berhubungan dengan fungsi objektif (fungsi tujuan) berdasarkan kondisi-kondisi yang membatasinya. Dalam hal ini, optimasinya berupa memaksimalkan atau meminimalkan fungsi objektif. Program linear merupakan bagian dari matematika yang berbentuk model, yang terdiri dari pertidaksamaan linear sebagai salah satu metode untuk memecahkan berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari.

Program linier merupakan kata benda dari pemrograman linier (*linear programming*), muncul dalam penelitian operasional (*operational research*). Menurut George B. Dantzing yang sering disebut Bapak Linear Programming, di dalam bukunya "*Linear Programming and Extension*", menyebutkan bahwa ide dari linear programming ini berasal dari ahli matematik Rusia bernama L.V.

Kantorovich yang pada tahun 1939 menerbitkan sebuah karangan dengan judul "*Mathematical Methods in The Organization and Planning of Production*", yang didalamnya telah dirumuskan persoalan linear programming untuk pertama kalinya. Ide ini, di Rusia tidak berkembang dan justru berkembang di dunia barat, kemudian tahun 1947 seorang ahli matematik dari Amerika Serikat yaitu George B. Dantzing menemukan suatu cara untuk memecahkan persoalan linear programming tersebut dengan suatu metode yang disebut "Simplex Methods". Setelah itu, *linear programming*

berkembang pesat sekali, semula di bidang militer (untuk penyusunan strategi perang) maupun di bidang bussines (persoalan untuk mencapai maksimum profit, minimum loss, dll). Sekarang berkembang luas di dalam perencanaan pembangunan ekonomi nasional, misalnya di dalam penentuan "*allocation of investments*" ke dalam sektor-sektor perekonomian, "*rotation corp policy*", peningkatan penerimaan devisa, dll. Program linier (*linear programming*) merupakan meodel matematik dalam mengalokasikan sumberdaya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Program linier sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linear dan system kendala linier.

Pemrograman linier adalah metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai hasil yang optimum seperti memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Program linier banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi didalam bidang bisnis, industri, perbankan, pendidikan, dan masalah-masalah lain yang dapat dinyatakan dalam bentuk linier. Agar suatu masalah optimasasi dapat diselesaikan dengan program linier, masalah program linier itu harus dapat diubah menjadi permasalahan matematis. Ini berarti bahwa masalah tadi harus bisa dituangkan kedalam bentuk model matematika,

Program Linier banyak diterapkan dalam membantu menyelesaikan masalah ekonomi, indutri, militer, social, kesehatan dan lain-lain. Program Linier merupakan metode matematik yang bertujuan untuk mendapatkan keputusan optimal. Metode tersebut digunakan dalam mengalokasikan sumberdaya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal

seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya yang terdiri dari:

1. Variabel penentu atau variabel keputusan, yaitu variabel yang dapat menentukan keputusan-keputusan yang akan dibuat dalam pencapaian solusi optimal;
2. Fungsi tujuan, yaitu fungsi linier yang menggambarkan tujuan atau sasaran yang hendak dicari nilai optimumnya;
3. Fungsi kendala, yaitu fungsi-fungsi linier yang harus terpenuhi dalam optimasi fungsi tujuan, dapat berbentuk persamaan atau pertidaksamaan
4. Batasan variable, yaitu batasan variabel menggambarkan tentang wilayah variabel. Jumlah sumber daya yang tersedia untuk persoalan ini tidak boleh bernilai negative

$$x_{ij} \geq 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$

C. Bentuk Umum Program Linear

Fungsi tujuan (maksimum/minimum):

$$Z_{\text{maks/min}} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

Fungsi kendala:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq (\text{atau } \geq) b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq (\text{atau } \geq) b_2$$

...

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq (\text{atau } \geq) b_m$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Keterangan:

- M : banyaknya jenis sumber yang terbatas atau fasilitas yang tersedia
- N : banyaknya kegiatan-kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas terbatas tersebut
- x_j : variabel keputusan untuk kegiatan ke- j ($j=1,2, \dots, n$)
- a_{ij} : banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran (output) kegiatan j ($i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n$)
- b_i : banyaknya sumber (fasilitas) yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan ($i=1,2, \dots, m$)
- c_j : kenaikan nilai Z apabila pertambahan tingkat kegiatan (x_{ij}) dengan satu satuan (unit) atau merupakan sumbangan setiap satuan keseluruhan kegiatan j terhadap nilai Z
- Z : nilai yang dioptimalkan (maksimum atau minimum)

D. Persoalan Optimasi dan Persoalan *Programming*

Pada dasarnya persoalan optimasi (*optimazion problems*) merupakan suatu persoalan membuat nilai fungsi $z = Z_{\text{maks/min}}$ $= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$, dengan variable yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n$ menjadi maksimum atau minimum dengan memperhatikan kendala-kendala atau pembatas-pembatas yang ada. Biasanya pembatas-pembatas tersebut meliputi tenaga kerja, uang, material yang merupakan input, serta waktu dan ruang.

Persoalan programming pada dasarnya berkenaan dengan penentuan alokasi yang optimal dari sumber-sumber yang langka (*limited resources*) untuk memenuhi suatu tujuan (*objective*). Misalnya, bagaimana mengkombinasikan beberapa sumber yang terbatas seperti tenaga kerja, material, mesin, tanah, pupuk, air sehingga diperoleh output yang maksimum.

Persoalan *linear programming* adalah persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variable sedemikian rupa sehingga nilai fungsi tujuan atau obyektif (*objective function*) yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada yaitu pembatasan mengenai inputnya. Pembatasan-pembatasan inipun harus dinyatakan dalam ketidaksamaan yang linier (*linear inequality*).

Suatu persoalan disebut persoalan program linier apabila memenuhi hal-hal berikut:

- 1) Tujuan (*objective*) yang akan dicapai harus dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi linier. Fungsi ini disebut fungsi tujuan (*objective function*);
- 2) Harus ada alternative pemecahan. Pemecahan yang membuat nilai fungsi tujuan optimum (laba yang maksimum, biaya yang minimum, dll) yang harus dipilih;
- 3) Sumber-sumber tersedia dalam jumlah terbatas (bahan mentah terbatas, ruangan untuk menyimpan barang terbatas, dll). Pembatasan-pembatasan harus dinyatakan di dalam ketidaksamaan yang linier (*linear inequality*)

Secara teknis, ada syarat tambahan dari permasalahan program linier yang harus diperhatikan sebagai asumsi dasar yaitu:

- 1) Kepastian (*certainty*), yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala sudah diketahui dan tidak berubah selama periode analisa;
- 2) Proporsionalitas (*proportionality*), yaitu adanya proporsionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala;
- 3) Penambahan (*additivity*), yaitu aktivitas total sama dengan penjumlahan aktivitas individu;
- 4) Bisa dibagi-bagi (*divisibility*), yaitu solusi tidak harus merupakan bilangan integer (bilangan bulat) tetapi bisa juga bilangan pecahan;
- 5) Variable tidak negatif (*non-negative variable*), yaitu bahwa semua nilai jawaban atau variabel tidak negative.

E. Formulasi Model Matematika

Masalah keputusan yang sering dihadapi analis adalah alokasi optimum sumberdaya langka. Sumberdaya dapat berupa uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruang atau teknologi. Tugas analis adalah mencapai hasil terbaik yang mungkin dengan keterbatasan sumber daya itu. Hasil yang diinginkan mungkin ditunjukkan sebagai maksimasi dari beberapa ukuran profit, penjualan dan kesejahteraan, atau minimisasi pada biaya, waktu dan jarak.

Setelah masalah diidentifikasi dan tujuan ditetapkan, maka langkah selanjutnya yaitu formulasi model matematik yang meliputi tiga tahap seperti berikut:

- 1) Tentukan variabel keputusan yang akan dicari, dan beri notasi dalam bentuk matematis atau menentukan variable yang tidak diketahui dan dinyatakan dengan symbol;
- 2) Tentukan batasan dari variabel keputusan tadi dan gambarkan dalam bentuk persamaan linear atau ketidaksamaan linear;
- 3) Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikannya dalam persamaan, pertidaksamaan atau fungsi
- 4) Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai suatu hubungan linear dari variable keputusan (memaksimumkan atau meminimumkan) dengan kata lain tentukan tujuan yang akan dicapai dari variabel keputusan tadi dan gambarkan dalam satu set fungsi linear yang berbentuk maksimisasi keuntungan atau minimisasi biaya.

CONTOH 1

PT. SANDANG mempunyai dua macam bahan mentah untuk membuat suatu produk. Bahan mentah I tersedia sebanyak 60 satuan dan bahan mentah II sebanyak 48 satuan (Kg, m, l, ton, dll). Produk yang akan dibuat ada dua macam, yaitu barang A dan barang B yang memerlukan bahan mentah I dan II. Perincian penggunaan bahan mentah sebagai berikut :

- 1 satuan barang A memerlukan 4 satuan bahan I dan 2 satuan bahan II.
- 1 satuan barang B memerlukan 2 satuan bahan I dan 4 satuan bahan II.

Apabila barang A dan barang B dijual maka,

- 1 satuan barang A laku Rp. 8.000,00
- 1 satuan barang B laku Rp. 6.000,00

Berapa besarnya produksi barang A dan barang B agar penjualan maksimum? Dengan memperhatikan batasan bahwa penggunaan bahan I dan bahan II tidak boleh melebihi 60 satuan dan 48 satuan.(semua barang laku dijual)

Penyelesaian :

*) Model matematika menggunakan tabel :

Bahan	Produk		Batasan bahan
	A	B	
I	4	2	60
II	2	4	48
Tujuan	Rp.8000	Rp.6000	

Menentukan variabel keputusan:

Misal: barang A = X barang B = Y

Menentukan batasan

Bahan I: $4X + 2Y \leq 60$

Bahan II: $2X + 4Y \leq 48$

Menentukan tujuan yang akan dicapai

Maksimum $Z = 8000X + 6000Y$

Dari ketiga langkah tersebut, dapat dirumuskan model linier programmingnya sebagai berikut:

$$\text{Maksimum } Z = 8000X + 6000Y$$

$$\text{d.b. } 4X + 2Y \leq 60$$

$$2X + 4Y \leq 48$$

$$\text{u.h } X \geq 0, Y \geq 0$$

CONTOH 2

Sebuah perusahaan meubel akan memproduksi lemari dan meja. Setiap produk melalui 2 tahap pengerjaan yaitu pemotongan dan tahap perampungan. Proses pemotongan lemari dan meja masing-masing membutuhkan waktu 4 jam. Sedangkan untuk proses perampungan, diperlukan waktu 3 jam untuk lemari dan 2 jam untuk meja. Waktu yang tersedia untuk proses pemotongan setiap periode adalah 100 jam, sedangkan proses perampungan setiap periode adalah 60 jam. Setiap lemari memberikan laba Rp 500.000,00 dan setiap meja memberikan laba Rp 300.000,00. Berapa jumlah lemari dan meja yang harus diproduksi setiap periode agar perusahaan memperoleh laba maksimum?

Penyelesaian:

Data yang diketahui dari permasalahan di atas dapat disajikan dalam table berikut:

Produk	Lemari	Meja	Kapasitas waktu yang tersedia (jam)
Proses pemotongan (jam)	4	3	100
Proses perampungan (jam)	4	2	60
Laba per produk	500.000	300.000	

Variabel penentu:

Misal

x_1 = banyaknya lemari yang harus diproduksi
dalam satu periode

x_2 = banyaknya meja yang harus diproduksi
dalam satu periode

Fungsi tujuan:

$$Z_{max} = 500000 x_1 + 300000 x_2$$

Fungsi kendala:

$$4 x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$4 x_1 + 2x_2 \leq 60$$

Syarat non negatif:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

CONTOH 3

Pak Eko mempunyai sebidang tanah yang luasnya 200 m², rencananya tanah tersebut akan dibuat lahan parkir mobil dan bus. Luas tempat parkir rata-rata yang dibutuhkan sebuah mobil 10 m² dan sebuah bus 20 m², tempat parkir tersebut tidak dapat menampung lebih dari 12 mobil. Pak Eko akan menentukan harga parkir setiap jamnya sebesar Rp.8000,00 untuk mobil dan Rp.15.000,00 untuk bus. Jika dalam satu jam tempat parkir tersebut penuh dan tidak ada kendaraan yang keluar masuk, berapa jumlah tempat parkir mobil dan bus yang harus dibuat agar Pak Eko