

Buku Ajar

Matematika

Sekolah

Novi Mayasari, S.Pd., M.Pd.
Dr. Anita Dewi Utami, M.Pd.
Puput Suriyah, S.Pd., M.Pd.



BUKU AJAR MATEMATIKA SEKOLAH

BUKU AJAR MATEMATIKA SEKOLAH

Novi Mayasari, S.Pd., M.Pd.
Dr. Anita Dewi Utami, M.Pd.
Puput Suriyah, S.Pd., M.Pd.



BUKU AJAR MATEMATIKA SEKOLAH

© Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI)

Penulis:

Novi Mayasari, S.Pd., M.Pd.

Dr. Anita Dewi Utami, M.Pd.

Puput Suriyah, S.Pd., M.Pd.

Editor: Puput Suriyah, S.Pd., M.Pd.

Cetakan Pertama: Januari 2022

Cover: Rusli

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151

Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org

E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia

All Right Reserved

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022

; 14,8 x 21 cm

ISBN: 978-623-448-014-6

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang

Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, serta kepada semua pihak sehingga kami sebagai penulis bisa membuat buku ajar **“Matematika Sekolah”**. Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para mahasiswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini dengan sebaik-baiknya.. Buku ini disusun sebagai salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar mata kuliah Matematika Sekolah I. Buku ini terdiri dari. Masing-masing bab dilengkapi oleh materi yang mana tiap materi diberikan contoh soal dan pembahasan ditambah dengan latihan soal pada bagian akhir buku ini.

Sesuai dengan tujuan dalam pembelajaran matematika, para mahasiswa diharapkan dapat memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep, dan mengaplikasikannya untuk memecahkan masalah. Para mahasiswa juga diharapkan mampu menggunakan penalaran, mengomunikasikan gagasan dengan berbagai perangkat matematika, serta memiliki sikap menghargai matematika dalam kehidupan.

Akhirnya kami menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penerbitan buku ini.

Bojonegoro, 13 Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
BAB I HAKEKAT MATEMATIKA.....	1
A. Pengertian Matematika	1
B. Beberapa Definisi Para Ahli Mengenai Matematika antara lain :	2
C. Matematika Adalah Ilmu Deduktif.....	3
D. Matematika Sebagai Ratu Dan Pelayan Ilmu.....	5
E. Matematika Sebagai Bahasa Ilmu	6
F. Matematika Sebagai Ilmu Terstruktur	8
G. Karakteristik Matematika.....	10
H. Objek Matematika	24
 BAB II PEMBELAJARAN MATEMATIKA.....	27
A. Hakekat Pembelajaran Matematika.....	27
B. Karakteristik Pendidikan Matematika	31
C. Tujuan Pembelajaran Matematika di Sekolah	32
D. Rangkuman.....	33
 BAB III SISTEM BILANGAN	41
A. Konsep Urutan Bilangan.....	44
B. Sifat Urutan Bilangan	45
C. Konsep Hasil Bagi.....	51
D. Sifat-Sifat Habis Bagi.....	52
E. Ciri Bilangan Yang Habis Bagi	55
 BAB IV DASAR-DASAR GEOMETRI	58
A. Titik.....	64

B. Garis	65
C. Bidang	66
D. Ruang	68
E. Hubungan antara Titik, Garis, dan Bidang	70
DAFTAR PUSTAKA.....	81
GLOSARIUM.....	82
TENTANG PENULIS	83



PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU

Buku Ajar “**Matematika Sekolah**” bertujuan untuk memberikan gambaran kepada pembaca tentang “Materi Matematika Sekolah. Buku ajar ini berisi tentang : Hakekat Matematika, Pembelajaran Matematika, Sistem Bilangan, dan Titik, Garis, bidang dan ruang.

Bab I: hakekat matematika membahas tentang Pengertian Matematika, beberapa definisi para ahli mengenai matematika, matematika adalah ilmu deduktif, matematika sebagai ilmu, matematika sebagai ilmu yang terstruktur, karakteristik matematika, objek matematika.

Bab II: Pembelajaran Matematika membahas tentang Hakekat pembelajaran matematika, karakteristik pembelajaran matematika, tujuan pembelajaran matematika sekolah, dan rangkuman.

Bab III: Sistem Bilangan membahas tentang konsep urutan bilangan, sifat urutan bilangan, konsep hasil bagi, sifat-sifat habis bagi, ciri bilangan yang habis bagi

Bab IV: Dasar-dasar geometri membahas tentang titik, garis, bidang, ruang, hubungan titik garis, bidang, dan ruang.

Alhamdulillah dengan terselesaikannya Buku Ajar ini bertujuan agar pembaca khususnya mahasiswa dan masyarakat pada umumnya untuk lebih memahami tentang matematika sekolah.

Motto:

Jadilah orang yang rajin dan terus belajar, sebelum menyesali kemalasan yang membelenggu dan membuat kita melewatkan kesempatan emas yang tuhan berikan. By N_Ms

BAB I

HAKEKAT MATEMATIKA

Kompetensi Dasar:

- a) Mahasiswa mampu memahami dan mengkaji konsep-konsep dalam aritmatika,
- b) Mahasiswa mampu memahami dan mengkaji aljabar
- c) Mahasiswa mampu memahami geometri dalam pembelajarannya di sekolah

CPL :

- a) Mahasiswa mampu memahami konsep dasar tentang dasar-dasar matematika.
- b) Mahasiswa mampu menganalisis konsep dasar tentang dasar-dasar matematika.

A. Pengertian Matematika

Kata matematika berasal dari perkataan Latin *mathematika* yang mulanya diambil dari perkataan Yunani *mathematike* yang berarti mempelajari. Perkataan itu mempunyai asal katanya *mathema* yang berarti pengetahuan atau ilmu (*knowledge, science*). Kata *mathematike* berhubungan pula dengan kata lainnya yang lambang sama, yaitu *mathein* atau *mathenein* yang artinya belajar (berpikir). Jadi, berdasarkan asal katanya, maka perkataan matematika berarti ilmu pengetahuan yang didapat dengan berpikir (bernalar). Matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia rasio (penalaran), bukan menekankan dari hasil eksperimen atau hasil observasi matematika terbentuk karena pikiran-pikiran manusia, yang berhubungan dengan idea, proses, dan penalaran (Russeffendi ET, 1980 :148).

Matematika terbentuk dari pengalaman manusia dalam dunianya secara empiris. Kemudian pengalaman itu diproses di dalam dunia rasio, diolah secara analisis dengan penalaran di dalam struktur kognitif sehingga sampai terbentuk konsep-konsep matematika supaya konsep-konsep matematika yang terbentuk itu mudah dipahami oleh orang lain dan dapat dimanipulasi secara tepat, maka digunakan lambang matematika atau notasi matematika yang bernilai global (universal). Konsep matematika didapat karena proses berpikir, karena itu logika adalah dasar terbentuknya matematika. Pada awalnya cabang matematika yang ditemukan adalah Aritmatika atau Berhitung, Aljabar, Geometri setelah itu ditemukan Kalkulus, Statistika, Topologi, Aljabar Abstrak, Aljabar Linear, Himpunan, Geometri Linier, Analisis Vektor, dll.

B. Beberapa Definisi Para Ahli Mengenai Matematika antara lain :

- 1) Menurut Russefendi (1988 : 23) : Matematika terorganisasikan dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan, definisi-definisi, aksioma-aksioma, dan dalil-dalil di mana dalil-dalil setelah dibuktikan kebenarannya berlaku secara umum, karena itulah matematika sering disebut ilmu deduktif.
- 2) Menurut James dan James (1976) : Matematika adalah ilmu tentang logika, mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan lainnya. Matematika terbagi dalam tiga bagian besar yaitu aljabar, analisis dan geometri. Tetapi ada pendapat yang mengatakan bahwa matematika terbagi menjadi empat bagian yaitu aritmatika, aljabar,

geometris dan analisis dengan aritmatika mencakup teori bilangan dan statistika.

- 3) Menurut Johnson dan Rising dalam Russefendi (1972): Matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logis, matematika itu adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas dan akurat representasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai ide daripada mengenai bunyi. Matematika adalah pengetahuan struktur yang terorganisasi, sifat-sifat dalam teori-teori dibuat secara deduktif berdasarkan kepada unsur yang tidak didefinisikan, aksioma, sifat atau teori yang telah dibuktikan kebenarannya adalah ilmu tentang keteraturan pola atau ide, dan matematika itu adalah suatu seni, keindahannya terdapat pada keterurutan dan keharmonisannya.
- 4) Menurut Reys – dkk (1984): Matematika adalah telaahan tentang pola dan hubungan, suatu jalan atau pola berpikir, suatu seni, suatu bahasa dan suatu alat.
- 5) Menurut Kline (1973): Matematika itu bukan pengetahuan menyendiri yang dapat sempurna karena dirinya sendiri, tetapi adanya matematika itu terutama untuk membantu manusia dalam memahami dan menguasai permasalahan sosial, ekonomi, dan alam.

C. Matematika Adalah Ilmu Deduktif

Matematika dikenal sebagai ilmu deduktif, karena proses mencari kebenaran (generalisasi) dalam matematika berbeda dengan ilmu pengetahuan alam dan ilmu pengetahuan yang lain. Metode pencarian kebenaran yang dipakai adalah metode deduktif, tidak dapat dengan cara induktif. Pada ilmu

pengetahuan alam adalah metode induktif dan eksperimen. Walaupun dalam matematika mencari kebenaran itu dapat dimulai dengan cara induktif, tetapi seterusnya generalisasi yang benar untuk semua keadaan harus dapat dibuktikan dengan cara deduktif. Dalam matematika suatu generalisasi dari sifat, teori atau dalil itu dapat diterima kebenarannya sesudah dibuktikan secara deduktif. Contoh dalam ilmu fisika, bila seorang melakukan percobaan (eksperimen) sebatang logam dipanaskan maka memuai dan dilanjutkan dengan logam-logam yang lainnya, dipanaskan ternyata memuai juga, maka ia dapat membuat kesimpulan (generalisasi) bahwa setiap logam yang dipanaskan itu dapat memuai. Generalisasi yang dibuat secara induktif tersebut dalam ilmu fisika dapat dibenarkan contoh dalam ilmu fisika di atas, pada matematika contoh-contoh seperti itubaru dianggap sebagai generalisasi jika kebenarannya dapat dibuktikan secara deduktif. Berikut adalah beberapa contoh pembuktian dalil atau generalisasi pada matematika. Dalil atau generalisasi berikut dibenarkan dalam matematika karena sudah dapat dibuktikan secara deduktif.

Contoh 1

Bilangan ganjil ditambah bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Misalnya kita ambil beberapa buah bilangan ganjil, baik ganjil positif, atau ganjil negatif yaitu

+	1	3	5	7
-1	0	2	4	6
-3	-2	0	8	6
5	6	8	10	12
7	8	10	12	14

Dari data di atas, terlihat bahwa untuk setiap dua bilangan ganjil jika dijumlahkan hasilnya selalu genap. Dalam matematika hasil di atas belum dianggap sebagai suatu generalisasi, walaupun anak membuat contoh-contoh dengan bilangan yang lebih banyak lagi. Pembuktian dengan cara induktif ini harus dibuktikan lagi dengan cara deduktif.

Pembuktian secara deduktif sebagai berikut :

Misalkan : a dan b adalah sembarang bilangan bulat, maka $2a$ bilangan genap dan $2b$ bilangan genap, maka $2a + 1$ bilangan ganjil dan $2b + 1$ bilangan ganjil.

D. Matematika Sebagai Ratu Dan Pelayan Ilmu

Matematika disebut sebagai ratunya ilmu karena matematika merupakan ilmu yang mandiri, karena tanpa bantuan ilmu lain matematika dapat tumbuh dan berkembang untuk ilmunya sendiri. Hal penting yang merupakan sebuah ciri dari matematika yang membedakan dengan semua cabang ilmu lain adalah kedudukannya yang otonom dan dapat mencukupi kebutuhannya sendiri. Selain sebagai ratu matematika juga dikatakan sebagai pelayan ilmu pengetahuan karena perkembangan dan penemuannya bergantung kepada matematika. Sebagai contoh teori-teori pada cabang ilmu fisika, kimia, dan ekonomi dikembangkan dan ditemukan melalui konsep fungsi, konsep persamaan diferensial atau konsep integral. Begitu juga teori Mendel pada cabang ilmu biologi dikembangkan melalui konsep probabilitas.

Dari uraian di atas jelas bahwa selain matematika berkembang untuk dirinya sendiri sebagai ilmu, matematika juga berfungsi untuk melayani ilmu pengetahuan di cabang lain.

Cabang ilmu biologi dikembangkan melalui konsep probabilitas.

E. Matematika Sebagai Bahasa Ilmu

Dua manusia atau lebih untuk dapat hidup bersama atau berinteraksi harus ada komunikasi. Pada umumnya, seseorang akan mengerti maksud dan tujuan orang lain dalam menyampaikan pesan jika orang tersebut menggunakan bahasa. Bahasa yang digunakan itu dapat berupa Bahasa isyarat, Bahasa lisan atau Bahasa tulis. Jika kita diajak orang bicara, kemudian kita menganggukkan kepala itu berarti kita setuju. Jika kita mengirim surat melalui telegram maka bahasa yang digunakan dalam telegram adalah bahasa sandi, misal morse.

Berdasarkan apa yang telah diuraikan di atas maka yang dimaksud Bahasa adalah lambang-lambang atau simbol-simbol serta tanda-tanda yang mengemban tugas untuk menyampaikan pesan tertentu kepada yang berkepentingan. Dengan demikian, dua orang atau lebih dalam menyampaikan pesan dapat menggunakan tanda-tanda, simbol-simbol atau lambang-lambang tertentu asal orang-orang tersebut mengerti. Matematika bukan hanya alat berpikir, namun matematika juga merupakan alat bantu untuk memecahkan masalah. Awalnya matematika itu hanya digunakan sebagai alat berpikir untuk sekelompok orang dalam menghitung, mengukur barang-barang miliknya. Namun, selanjutnya berkembang sebagai alat bantu bagi ilmuwan untuk memecahkan masalah tertentu dalam bidang ilmunya. Dari pengertian Bahasa yang diungkapkan di atas maka matematika dapat juga dipandang sebagai bahasa karena di dalamnya terkandung simbol-simbol atau lambang-lambang untuk

menyampaikan pesan kepada orang lain. Bahasa matematika dipergunakan para matematikawan untuk dapat saling berhubungan dengan matematikawan atau ilmuwan lainnya. Pada umumnya, setiap orang atau ilmuwan menggunakan bahasanya sesuai dengan negara dan kebangsaan masing-masing. Namun, simbol-simbol, lambang-lambang atau huruf-huruf yang digunakan dalam matematika merupakan Bahasa internasional terutama bagi para ilmuwan. Walaupun bahasa matematika tidak seperti bahasa pada umumnya, namun bahasa matematika yang diungkapkan para ilmuwan di negara satu dengan negara lainnya adalah sama. Matematika merupakan Bahasa dari ilmu, karena dengan matematika para ilmuwan dapat mengembangkan ilmunya atau menyampaikan hasil-hasil temuannya. Dengan matematika bahasa yang digunakan lebih sederhana dan kata-kata yang digunakan tidak perlu bertele-tele seperti bahasa biasa. Dengan bahasa matematika para ilmuwan dapat menelaah berbagai gejala dan hubungan-hubungan dari suatu gejala-gejala atau kejadian-kejadian tersebut. Selanjutnya hasil dari telaah tersebut dapat diungkapkan dengan tepat dan jelas dengan bahasa matematika. Tanpa menggunakan kata-kata bias jika ada kalimat $2x + 3y$ maka setiap orang/ilmuwan di seluruh dunia pasti bisa membaca persamaan tersebut tanpa melihat dari bangsa dan negara mana ilmuwan tersebut.

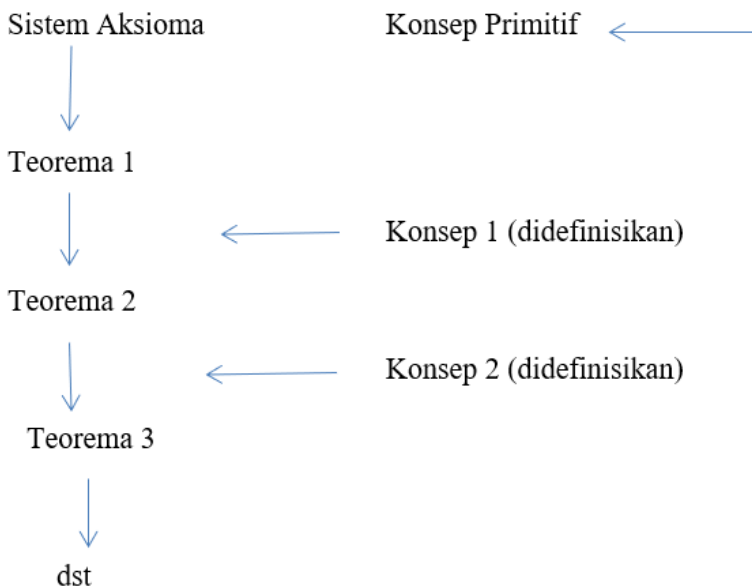
Uraian di atas mengungkapkan bahwa dengan simbol-simbol dan lambang-lambangny matematika dapat menyampaikan pesan kepada yang berkepentingan karena simbol-simbol dan lambang-lambangny dapat mewakili sesuatu yang akan disampaikan. Begitu juga jika ada simbol $\sim$ ini berarti digunakan untuk mengatakan kesebangunan dua objek/benda, symbol Σ untuk symbol menyatakan anggota

dari suatu himpunan, huruf a, b, c digunakan untuk konstanta, huruf x, y, z digunakan untuk sebarang sebarang variabel, simbol $\forall x$ digunakan untuk menyatakan untuk setiap x dan sebagainya. Dengan menggunakan matematika sebagai bahasa pemikiran ilmiah dalam bidang ilmu dapat dinyatakan dengan jelas, cermat, fleksibel, dan ringkas. Dengan kata lain, matematika merupakan bahasa ilmu yang ekonomis karena dengan sedikit simbol/lambang yang digunakan maka makna yang terkandung sudah jelas.

F. Matematika Sebagai Ilmu Terstruktur

Telah dikemukakan sebelumnya bahwa matematika adalah pengetahuan terstruktur yang terorganisasi. Sifat-sifat atau teorema-teoremanya dibuat secara deduktif berdasarkan pada unsur-unsur yang tidak didefinisikan, aksioma-aksioma atau postulat-postulat, sifat-sifat atau teorema-teorema yang telah dibuktikan kebenarannya (Rusefendi, 1990). Dengan demikian, struktur dalam matematika tersusun secara hierarkis (terbatas), logis, dan sistematis mulai dari yang paling sederhana sampai pada konsep yang paling kompleks. Dengan kata lain, struktur-struktur dalam matematika dimulai dari unsur-unsur atau istilah-istilah yang tidak didefinisikan (unsur-unsur primitif) kemudian dibuat definisi-definisi mengenai unsur-unsur atau istilah-istilah itu. Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan unsur-unsur yang didefinisikan dapat dibuat asumsi-asumsi yang disebut aksioma atau postulat. Postulat atau aksioma merupakan suatu pernyataan yang kebenarannya tidak perlu dibuktikan. Selanjutnya, dari unsur-unsur primitif, unsur-unsur yang didefinisikan, aksioma atau postulat dapat disusun teorema-teorema yang kebenarannya harus dibuktikan secara deduktif dan berlaku umum.

Berikut disajikan skema mengenai struktur dalam matematika.



Cara membuat skema itu dapat berbeda, namun pada intinya sama. Pada skema di atas untuk mempermudah melihat bahwa “lajur kiri” adalah lajur yang memuat pernyataan-pernyataan (aksioma dan prinsip), sedangkan “lajur kanan” adalah lajur pengertian atau konsep (unsur-unsur primitif) dan konsep-konsep lain.

Dalam matematika terdapat konsep prasyarat (konsep awal) sebagai dasar untuk memahami konsep selanjutnya. Hal ini jelas bahwa jika konsep prasyarat belum dikuasai maka konsep berikutnya sulit untuk dipahami. Sebagai contoh untuk mempelajari konsep segitiga siku-siku sama kaki jelas bahwa konsep segitiga, konsep sudut, dan konsep sisi/ruas garis harus sudah dipahami oleh siswa.

G. Karakteristik Matematika

Pada pembahasan sebelumnya telah diuraikan tentang beberapa pengertian matematika, dan tidak ada definisi tunggal yang disepakati. Walaupun demikian, dari beberapa definisi yang telah diuraikan di atas jika dicermati dapat dilihat ada ciri-ciri khusus atau karakteristik khusus yang terdapat pada pengertian matematika. Beberapa karakteristik matematika adalah:

1. memiliki objek kajian abstrak

2. bertumpu pada kesepakatan;
3. berpola pikir deduktif;
4. memiliki simbol yang kosong dari arti;
5. memperhatikan semesta pembicaraan (universal);
6. konsisten dalam sistemnya.

Berikut ini akan diungkapkan masing-masing karakteristik beserta contohnya.

1. Memiliki Objek Kajian Abstrak

Dalam matematika objek dasar yang dipelajari adalah abstrak. Objek-objek itu merupakan objek pikiran. Objek dasar itu meliputi:

- a. fakta,
- b. konsep,
- c. skill/keterampilan, dan
- d. prinsip.

Berikut akan dijelaskan secara rinci tentang objek-objek dasar matematika tersebut.

- a. Fakta dalam matematika merupakan konvensi-konvensi atau kesepakatan yang dapat disajikan dalam bentuk

lambang atau simbol, yang umumnya sudah dipahami oleh pengguna matematika.

Contoh dalam:

- 1) aritmetika-aljabar, misal: kata “dua” yang disimbolkan dengan “2”, rangkai kata “empat ditambah lima” disimbolkan dengan “ $4+5$ ” merupakan fakta yang tersusun. Demikian pula bahwa “+” merupakan simbol untuk operasi “penjumlahan” juga merupakan fakta. Perkataan “dua pangkat tiga” yang disimbolkan dengan “ 2^3 ” juga merupakan fakta, dan masih banyak lagi.
 - 2) Geometri, misal: “sudut” disimbolkan dengan “ $\angle$ ”; “segitiga” disimbolkan dengan “ $\triangle$ ”; “lingkaran” disimbolkan dengan “O” dan masih banyak lagi.
- b. Konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan orang dapat mengklasifikasikan objek-objek atau peristiwa-peristiwa dan menentukan apakah objek atau peristiwa itu merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak tersebut. Konsep dalam matematika dapat diperkenalkan melalui “definisi”, “gambar/gambaran/contoh”, “model/peraga”. Konsep itu sendiri abstrak, tetapi setiap konsep mempunyai “nama konsep”. Nama konsep itu sendiri dapat dipandang sebagai “unsur bahasa”. Dengan adanya nama konsep tersebut maka suatu konsep dapat diperkenalkan melalui “ungkapan”. Nah, “ungkapan yang membatasi suatu konsep” disebut “definisi konsep”. Sering juga disebut “pengertian konsep”. Sedangkan sebagai pangkal ditetapkan “konsep yang tidak didefinisikan” yang juga disebut “konsep primitif”.

Contoh dalam:

- 1) geometri, misal: "trapesium adalah segi empat yang tepat sepasang sisinya sejajar" atau "segi empat yang terjadi jika sebuah segitiga dipotong oleh sebuah garis sejajar salah satu sisinya disebut trapesium".
- 2) aritmatika-aljabar, misal: "bilangan genap" diungkap dengan definisi "bilangan yang merupakan kelipatan 2", "penggunaan dua bilangan bulat $a - b$ " diungkap dengan definisi berupa rumus $a - b = a + (-b)$.

Kedua definisi trapesium di atas memiliki isi kata atau makna kata yang berbeda. Kedua definisi itu dikatakan memiliki "intensi" yang berbeda, tetapi memiliki "ekstensi" yang sama. Kesamaan ekstensi itu dapat diuji dengan pertanyaan "adakah trapesium menurut definisi pertama yang tidak masuk dalam trapesium menurut definisi kedua dan sebaliknya?" Ekstensi suatu definisi juga, yaitu "himpunan yang tertangkap oleh definisi itu". Definisi trapesium yang pertama digolongkan dalam definisi analitis, yaitu yang menyebutkan genus proksimum (genus terdekat) dan deferensia spesifik (pembeda khusus). Sebagai contoh "Trapezium adalah segi empat yang" genus proksimum-nya, yaitu "segi empat", sedangkan deferensia spesifikasinya adalah keterangan yang berada di belakang kata "yang".

Sedangkan definisi trapesium yang kedua digolongkan kepada definisi genetik, yaitu definisi yang menyebutkan bagaimana konsep itu terbentuk atau terjadi. Sebagai contoh trapesium adalah segi empat yang terjadi bila sebuah segitiga dipotong oleh sebuah garis yang sejajar salah satu sisinya. Definisi yang ketiga adalah definisi yang dinyatakan dengan rumus, misal

rumus (i) $a - b = a + (-b)$, (ii) $0!$, (iii) $n = n(n - b)$, dan masih banyak lagi.

- c. Skill (juga dapat disebut operasi/relasi). Dalam pendidikan disebut skill, karena penekanan dilakukan terhadap “kerja yang dilakukan”, sedang operasi ditekankan kepada konsepnya. Operasi dalam matematika adalah “aturan untuk memperoleh elemen/unsur tunggal dari satu atau lebih elemen yang diberikan”. Elemen yang diberikan disebut elemen yang “dioperasikan”, sedangkan elemen tunggal “yang diperoleh” disebut “hasil operasi”. Algoritma dapat dipandang juga sebagai “skill” dapat juga dipandang sebagai “operasi” yang mungkin tidak hanya satu kali atau satu macam saja.

Contoh dalam:

- 1) aritmetika-aljabar, misal: “penjumlahan”, “pengurangan”. Juga “pengambilan akar” dan masih banyak yang lain.
 - 2) geometri, misal: “membagi dua sama besar sebuah ukuran sudut”, “menjumlahkan ukuran dua sudut”.
- d. Prinsip dalam matematika merupakan objek dasar matematika yang paling kompleks. Prinsip dapat memuat rangkaian fakta, konsep maupun operasi. Wujud dari prinsip dapat berupa teorema, lemma, sifat, hukum, dan sebagainya.

Contoh dalam:

- 1) aritmetika-aljabar, misal: untuk a , b , dan c bilangan real, berlakulah sifat asosiatif, yaitu “ $(a + b) + c = a + (b + c)$ ”; sifat komutatif, yaitu “ $a + b = b + a$ ”, dan seterusnya. Untuk memahami konsep sifat-sifat

penjumlahan di atas, terlebih dahulu harus memahami konsep penjumlahan.

- 2) geometri, misal: dua segitiga adalah sama dan sebangun, jika panjang dua sisi dan besar sudut apitnya dari segitiga yang satu, sama dengan panjang dua sisi dan besar sudut apitnya dari segitiga yang kedua. Untuk memahami konsep sama dan sebangun maka terlebih dahulu harus memahami konsep segitiga, konsep sudut, dan konsep sisi.

2. Bertumpu pada Kesepakatan

Seperti halnya dalam kehidupan sehari-hari, kehidupan bermasyarakat, bernegara dan berbangsa pasti ada kesepakatan yang harus kita patuhi. Dalam matematika, kesepakatan merupakan hal penting yang juga harus ditaati. Kesepakatan yang sangat mendasar adalah unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan aksioma. Unsur-unsur yang tidak didefinisikan ini juga disebut unsur primitif. Hal ini muncul untuk menghindari pendefinisian yang berputar-putar. Karenanya unsur primitif itu juga disebut “pengertian pangkal”. Contoh unsur-unsur primitif misalnya dalam geometri Euclides, yaitu titik, garis, dan bidang. Dari satu atau lebih unsur primitif dapat dibentuk konsep baru melalui definisi. Sedangkan aksioma atau postulat muncul untuk menghindari pembuktian yang berputar-putar sehingga aksioma ini kebenarannya tidak perlu dibuktikan. Karenanya aksioma juga disebut “pernyataan pangkal”. Salah satu contoh aksioma adalah “melalui dua titik dapat dibuat tepat satu garis”. Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat diturunkan suatu teorema. Contoh “kesepakatan” lain.

- a. Dalam aritmetika-aljabar, misal: penulisan lambang bilangan, dan sebagainya (di sini penekanan pada kesepakatannya, bukan makna faktanya).
- b. Dalam geometri, misal: untuk mendefinisikan jajargenjang adalah segi empat yang memiliki dua pasang sisi berhadapan sejajar. Jika kalimat tersebut dipilih sebagai definisi maka kalimat lainnya akan dipakai sebagai suatu teorema. Misalnya “segi empat yang sisi berhadapannya sama panjang adalah jajargenjang”.

3. Berpola Pikir Deduktif

Dalam matematika sebagai ilmu, pola pikir yang diterima hanya yang bersifat deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat diartikan sebagai pemikiran dari hal yang bersifat umum menuju hal yang bersifat khusus. Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang sederhana maupun dalam bentuk yang sangat kompleks.

Contoh:

- a. Seorang siswa SD sudah mengerti makna konsep “persegi panjang” yang diajarkan gurunya. Suatu hari siswa tersebut melihat berbagai macam bentuk pigura yang terdapat pada suatu pameran lukisan. Saat itu, dia menunjukkan pigura yang berbentuk persegi panjang dan yang bukan persegi panjang. Ini berarti siswa tersebut telah menerapkan pemahaman umum tentang persegi panjang ke dalam situasi khusus tentang pigura-pigura tersebut. Jadi, siswa itu saat menunjuk pigura telah menggunakan pola pikir deduktif yang tergolong sederhana.
- b. Banyak teorema dalam matematika yang “ditemukan” melalui pengamatan-pengamatan khusus, misalnya

Teorema Pythagoras. Jika hasil pengamatan tersebut dimasukkan dalam suatu struktur matematika tertentu maka teorema yang ditemukan itu harus dibuktikan secara deduktif dengan menggunakan teorema atau definisi terdahulu yang telah diterima.

4. Memiliki Simbol yang Kosong dari Arti

Dalam matematika banyak sekali simbol-simbol yang digunakan. Simbol-simbol itu dapat berupa huruf, lambang bilangan, lambang operasi dan sebagainya. Rangkaian simbol-simbol dalam matematika dapat membentuk suatu model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, fungsi, dan sebagainya. Sebelum jelas ditetapkan semesta yang digunakan, simbol-simbol tersebut kosong dari arti. Huruf-huruf yang digunakan dalam model persamaan $x + y$ belum tentu berarti bilangan. Demikian juga tanda “+” belum tentu berarti operasi penjumlahan. Jadi, secara umum model $x + y$ dan tanda + masih kosong dari arti, terserah kepada siapa yang akan memanfaatkannya. Kosongnya arti dan simbol maupun tanda dalam matematika ini memungkinkan “intervensi” matematika ke dalam berbagai pengetahuan.

Contoh dalam: Aritmetika-aljabar

- a. Dalam aritmetika biasanya otomatis semestanya adalah “bilangan”.
- b. Dalam aljabar misal terdapat persamaan $x + y$, huruf x dan y belum dapat ditentukan nilainya sebelum semesta bilangan tersebut diberikan.

5. Memperhatikan Semesta Pembicaraan

Seperti halnya dengan kosongnya arti dari simbol-simbol atau tanda-tanda dalam matematika diperlukan juga kejelasan

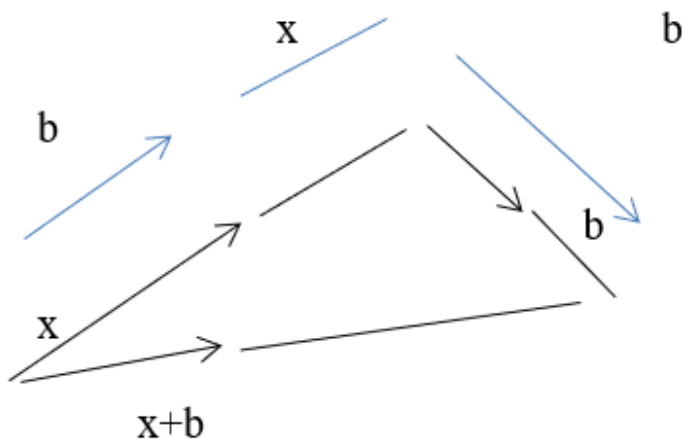
lingkup atau semesta pembicaraan untuk simbol atau tanda yang digunakan. Jika lingkup pembicaraannya bilangan maka simbol-simbol yang digunakan diartikan sebagai bilangan. Jika lingkup pembicaraannya transformasi maka simbol-simbol itu diartikan sebagai transformasi. Benar atau salahnya maupun ada atau tidaknya penyelesaian model matematika sangat ditentukan oleh semesta pembicaraannya.

Contoh 1:

Misal terdapat model $2x = 3$ jika semesta pembicaraannya bilangan real maka diperoleh $x = 1,5$, tetapi jika semesta pembicaraannya bilangan bulat maka tidak ada jawaban yang memenuhi. Jadi, jawaban yang sesuai dengan semestanya adalah tidak ada. Sering juga dikatakan bahwa himpunan penyelesaiannya adalah “himpunan kosong”.

Contoh 2:

Misal terdapat model $a + b = c$, jika semesta pembicaraannya vektor di bidang datar maka huruf-huruf tersebut tidak diartikan sebagai bilangan, tetapi diartikan sebagai vektor. Untuk menentukan penyelesaiannya diperlukan cara yang berbeda dengan bilangan. Cara yang digunakan adalah dengan menggunakan gambar sebuah segitiga seperti Gambar 1.1 di bawah ini.



6. Konsisten dalam Sistemnya

Dalam matematika terdapat banyak sistem. Ada sistem yang berkaitan satu dengan yang lain, ada pula sistem yang lepas satu dengan yang lain. Misal sistem geometri lepas dari sistem aljabar. Namun, dalam sistem aljabar di dalamnya mungkin terdapat banyak sistem yang terkait satu dengan yang lain. Misal sistem aksioma dalam grup, sistem aksioma dalam ring, sistem aksioma dalam field, dan sebagainya. Demikian juga dalam sistem geometri, terdapat sistem geometri netral, sistem geometri Euclides, sistem geometri non-Euclides, dan sebagainya. Di dalam masing-masing sistem dan strukturnya itu berlaku “ketaat-asasan” atau konsistensi. Hal ini dapat dikatakan bahwa dalam tiap sistem dan struktur tidak boleh ada kontradiksi. Suatu teorema atau definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terdahulu. Konsisten baik makna atau dalam hal kebenarannya. Jika telah ditetapkan atau disepakati bahwa $x + y$ dan $a + b$ maka $x + y + b$ haruslah sama dengan c .

Walaupun demikian, antara sistem atau struktur yang satu dengan system atau struktu yang lain mungkin saja terdapat pernyataan yang kontradiksi. Misal dalam sistem geometri Euclides dengan sistem geometri non-Euclides dijumpai pernyataan yang kontradiktif. Salah satu contoh pernyataan tersebut adalah “jumlah ukuran ketiga sudut dalam segitiga adalah 180° ” (geometri Euclides), sedangkan pada geometri non-Euclides adalah “jumlah ukuran ketiga sudut dalam segitiga kurang atau lebih dari 180° ”.

Latihan:

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Mengingat bahwa belum ada kesepakatan atau definisi tunggal tentang matematika, jelaskan apakah pengertian matematika jika dilihat dari sudut pandang objek dan strukturnya?
- 2) Walaupun terdapat beberapa pengertian atau definisi matematika namun terdapat beberapa karakteristik matematika. Sebutkan karakteristik matematika tersebut!
- 3) Mengapa seorang guru atau calon guru diharapkan mengetahui dan memahami karakteristik matematika?
- 4) Mengapa matematika dapat disebut ratu dan sekaligus pelayan ilmu?
- 5) Mengapa matematika dapat disebut sebagai bahasa ilmu?
- 6) Jelaskan apa perbedaan aksioma dan teorema? Berilah contohnya!
- 7) Mengapa matematika disebut sebagai ilmu terstruktur?
- 8) Banyak orang menyebutkan bahwa matematika adalah ilmu eksak atau ilmu pasti. Jelaskan apakah matematika