



POLA BERPIKIR PEMECAHAN MASALAH LIMIT FUNGSI

DI SEKOLAH MENENGAH ATAS



Dr. Dra. Junarti, M.Pd.

Dr. Rick Hunter Simanungkalit, S.Pd., M.Pd.

POLA BERPIKIR PEMECAHAN MASALAH LIMIT FUNGSI DI SEKOLAH MENENGAH ATAS

Dr. Dra. Junarti, M.Pd.
Dr. Rick Hunter Simanungkalit, S.Pd., M.Pd.



POLA BERPIKIR PEMECAHAN MASALAH LIMIT FUNGSI DI SEKOLAH MENENGAH ATAS

Penulis:
Dr. Dra. Junarti, M.Pd.
Dr. Rick Hunter Simanungkalit, S.Pd., M.Pd.

Editor:
Erik Santoso

Layouter :
Tim Kreatif PRCI

Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Mei 2024

Hak Cipta 2024, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2024 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2024
; 14,8 x 21 cm
ISBN : 978-623-448-866-1

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga buku dengan judul “Pola Berpikir Pemecahan Masalah Limit Fungsi Di Sekolah Menengah Atas” dapat diselesaikan dengan baik. Buku ini merupakan hasil kajian pengembangan tahapan pada pola berpikir siswa dalam pemecahan masalah limit fungsi di SMA.

Tujuan dari penulisan buku ini yaitu untuk mengembangkan tahapan pola berpikir yang sudah pernah dikaji pada materi aljabar abstrak di tingkat Universitas untuk dikembangkan pada matematika di Sekolah Menengah Atas khususnya untuk konsep limit fungsi. Ditemukannya tahapan berpikir pada proses pemecahan masalah di tingkat Sekolah Menengah Atas ini diharapkan dapat membantu guru atau calon guru sebagai bagian dari usaha untuk mempersiapkan proses pembelajarannya selanjutnya. Selanjutnya dapat dilakukan pendekatan yang akan dipilih pada proses pembelajarannya.

Penulis menyadari bahwa penulisan monograf ini masih banyak kekurangannya dari sudut pandang isi maupun tata tulisnya. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat kami harapkan untuk perbaikan monograf ini. Semoga monograf ini dapat menambah wawasan sebagai pengetahuan dalam bidang Pendidikan matematika

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB I PENDAHULUAN	1
BAB II POLA BERPIKIR PADA PROSES PEMAHAMAN DALAM PEMECAHAN MASALAH	8
A. Pengertian Pola Berpikir	8
B. Proses Pemecahan Masalah Matematika	16
C. Pola Berpikir melalui Analogi, Abstraksi dan Konstruksi	20
BAB III KONSEP LIMIT FUNGSI	25
BAB IV POLA BERPIKIR PEMECAHAN MASALAH LIMIT FINGSI	32
DAFTAR PUSTAKA	51

BAB I PENDAHULUAN

Limit Fungsi merupakan salah satu topik pada mata pelajaran di Sekolah Menengah Atas (SMA). Limit fungsi diajarkan sebagai materi peminatan pada kurikulum 2013. Konsep limit merupakan materi matematika dasar yang harus dipahami sebagai prasyarat pada materi matematika selanjutnya baik pada di tingkat SMA maupun tingkat Universitas. Konsep limit merupakan konsep dasar yang harus dipahami (Junarti et al., 2023) untuk diimplementasikan pada materi lain selain matematik lanjut misalnya mata pelajaran fisika.

Limit fungsi bagian dari konsep limit dan tidak lain adalah bagian dari ide dasar kalkulus. Konsep limit merupakan pengertian yang penting dan mendasar antara lain dalam kalkulus (Juter, 2007; Wu, 2020). Kalkulus merupakan mata kuliah yang diberikan pada program studi pendidikan matematika pada LPTK maupun pada program studi Teknik atau matematika murni maupun sebagai matematika terapan. Limit fungsi juga merupakan materi dasar dari mata kuliah analisis riil. Analisa riil merupakan mata kuliah pada kelompok analisis yang diberikan pada perguruan tinggi.

Dalam matematika analisis tidak terlepas dari konsep limit dan merupakan konsep yang sulit dipahami (Wu, 2020)(Maharaj, 2010). Pada Limit terkait adanya asumsi keberadaan titik tertentu yang paling dekat dengan nilai limit, menunjukkan nilai limit yang akurat. Pada kondisi yang sama, penentuan nilai limit diterapkan pula pada turunan dan digunakan untuk memahami masalah praktis umum dalam matematika. Analisis menunjukkan bahwa metode ini efektif untuk pemahaman yang akurat dari masalah batas.

Limit merupakan landasan dasar formal standar dari banyak aspek kalkulus: derivative sebagai batas kemiringan garis potong dengan lebar lebih kecil; Integral Riemann sebagai limit dari jumlah Riemann jaring yang lebih halus (Fernández-Plaza & Simpson, 2016). Dalam banyak kasus bahwa aplikasi limit yang berbeda direpresentasikan dengan simbol yang berbeda, misalnya $\sum$, $\int$, $\frac{d}{dx}$ (Fernández-Plaza & Simpson, 2016). Berkaitan dengan penggunaan simbol simbol ini menunjukkan bahwa limit mempunyai peran yang bisa ditekan sehingga mengarah kepada pengertian informal siswa tentang limit mempunyai peran yang lebih besar pada materi limit selanjutnya (Oehrtman, 2008). Terdapat tiga dasar pengertian limit: ada yang terkait dengan limit barisan dan ada yang terkait dengan limit fungsi di suatu titik, serta limit fungsi “di tak terhingga” (Fernández-Plaza & Simpson, 2016). Dalam hal simbol memiliki

bentuk yang hampir identik, misalnya $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ memiliki struktur yang sangat mirip. Oleh karena itu dalam matematika ada koherensi dalam kesamaan simbol dan definisi, sehingga suatu pengorganisasian yang mendasarinya sebagai kerangka kerja konseptual yang dapat membuat siswa gagal atau kurang dapat membedakan maupun menghubungkan dasar-dasar dari gagasan ini (Fernández-Plaza & Simpson, 2016). Struktur yang mirip mempengaruhi pemahaman yang menyebabkan miskonsepsi.

Pada tahapan berpikir siswa pengaruh struktur yang mirip ini dapat membuat terjadinya tahapan berpikir yang mengganggu kelogisan. Oleh karena itu tahapan berpikir merupakan bagian penting dalam pemahaman konsep atau tahapan pemecahan masalah matematika. Dalam pemikiran siswa terdapat proses analogi yaitu meniru atau menganalogi dari contoh yang mirip yang telah dipelajari atau dapat pula melalui tahapan mengkonstruksi atau mengabstraksi atau kolaborasi antar keduanya dari ketiga jenis proses tersebut atau mengkolaborasi ketiganya. Tahapan atau pola berpikir ini telah dikembangkan sebelumnya pada mahasiswa dalam mengenal struktur pada materi grup di universitas (Junarti et al, 2022) (Junarti et al, 2023). Urutan Pola dikelompokkan menjadi 4 tahapan: abstraksi-konstruksi($V_A \rightarrow D \rightarrow V_B$), analogi-abstraksi($V_A \rightarrow V_B \rightarrow D$), konstruksi-analogi ($D \rightarrow V_A \rightarrow V_B$), dan konstruksi saja ($D \rightarrow V_A, V_B$). Pola pertama adalah mengekstraksi struktur yang dikenal untuk membentuk

dasar definisi, dari mana konsep-konsep abstrak dibangun dalam konteks umum. Pola kedua yaitu mengekstraksi sifat dari struktur yang diketahui yang mengarah ke generalisasi dan kemudian ke definisi. Pola ketiga adalah konstruksi konsep melalui deduksi logis dari definisi siswa. Pola keempat adalah menkonstruksi struktur sifat atau objek matematika yang dikenal melalui deduksi logis dari definisi, kemudian dapat menganalogi struktur sifat atau objek matematika baru atau yang belum dikenal. Tahapan-tahapan ini setidaknya digunakan siswa dalam proses pemecahan masalah matematika (Novotna, 2006; Novotná & Hoch, 2008; Oktac, 2016; Junarti et al, 2022; Junarti et al, 2023). Proses yang saling berurutan di setiap Polanya yaitu siswa memulai dengan konstruksi awal yang dimiliki kemudian dilanjutkan proses analogi, abstraksi dan akhirnya siswa bisa membuat konstruksi secara formal (Junarti et al, 2022).

Penggunaan urutan Pola yang terjadi dalam tahapan pemikiran siswa sebagai pola pikir dalam melakukan pemahaman untuk sampai pada pemecahan masalah. Kegiatan pemahaman yang dilakukan untuk sampai kepada pemecahan masalah beberapa hal yang dilakukan mengarah kepada ketika siswa memahami konsep utama yang menjadi inti materi pelajaran, kemudian memahami konsep-konsep yang terkait pada topik utama (termasuk konsep sebelumnya yang mendasari konsep tersebut), dan pemahaman yang terjadi dalam melakukan pemahaman permasalahan yang akan dipecahkan. Pemahaman itu sendiri merupakan suatu proses

aktif yang terjadi pada Individu (Faye, 2014). Kegiatan pemahaman juga merupakan kegiatan yang terjadi pada proses kognitif (Radiusman, 2020). Kegiatan pemahaman ini merupakan kegiatan penting dalam pembelajaran matematika yang terus menerus dikaji dalam kajian (Fahma & Purwaningrum, 2021) (Cresswell & Speelman, 2020).

Matematika di tingkat universitas secara formal disajikan dalam buku teks dan kecepatan berpikirnya seringkali lebih tinggi dibandingkan siswa Sekolah Menengah Atas (SMA) (Juter, 2005). Berdasarkan perkembangan kognitif Piaget bahwa siswa pada usia SMA Indonesia semestinya sudah berada pada tahap operasional formal (Fahma & Purwaningrum, 2021). Pada tahapan operasional formal, tentunya siswa sudah dapat melakukan proses deduksi logis yang dikenal dengan konstruksi formal (Junarti et al, 2022). Matematika sering dipromosikan sebagai membekali mereka yang mempelajarinya dengan keterampilan yang dapat ditransfer seperti kemampuan untuk berpikir secara logis dan kritis atau untuk meningkatkan keterampilan investigasi, penuh kreativitas dalam pemecahan masalah (Cresswell & Speelman, 2020). Kemampuan seperti ini merupakan kemampuan menggunakan Pola berpikir agar dapat membantu pemecahan masalah secara maksimal.

Pentingnya pola berpikir dalam pemecahan masalah matematika yaitu untuk membantu siswa dalam menangkap pesan informasi bentuk konsep matematika yang diperoleh dari buku atau guru. Informasi yang

bentuknya konsep matematika memerlukan kepekaan simbol, kepekaan struktur, kepekaan makna. Bukti empiris bahwa urutan pembelajaran dan instruksi yang tepat dirancang untuk membantu siswa menyusun konsep secara aktif dapat terbukti sangat berhasil (Tall, 2002). Hal ini menunjukkan urutan Pola pemahaman untuk membantu pemecahan masalah, misalnya ketika siswa menangkap suatu konsep limit melalui definisi limit yang dijelaskan guru, maka masing-masing individu mempunyai cara yang berbeda. Apakah siswa langsung memahami penjelasan guru atau siswa baru paham jika setelah guru memberikan contoh terkait konsep limit, atau melalui ilustrasi gambar konsep limit, atau bahkan siswa baru paham jika guru memberikan contoh-contoh soal untuk diselesaikan? Pada tahapan ini memahami definisi membutuhkan proses abstraksi, namun faktanya tidak semua siswa dapat mengabstraksi definisi secara langsung. Bahkan ada mahasiswa pun yang belum mampu melakukan proses abstraksi definisi secara langsung, namun baru dapat melakukan abstraksi definisi jika dibantu dengan melalui contoh-contoh (Junarti et al, 2020).

Berdasarkan uraian di atas, maka penting untuk dilakukan kajian mengenai bagaimana pola berpikir dalam pemahaman dan pemecahan masalah dalam mengenal struktur pada konsep limit fungsi. Paka kajian ini mendiagnosis proses pemecahan masalah yang dilakukan siswa yang memungkinkan guru untuk mengembangkan pendekatan pengajaran

khususnya untuk mengatasi permasalahan tersebut dan untuk meningkatkan pemahaman konseptual. Hal ini penting dilakukan agar kedepannya dapat membantu calon guru dan guru untuk menetapkan pendekatan pembelajaran yang sesuai pada pembelajaran materi limit fungsi, sehingga membantu siswa lebih mudah memahami materi yang diajarkan

BAB II

POLA BERPIKIR PADA PROSES PEMAHAMAN DALAM PEMECAHAN MASALAH

A. Pengertian Pola Berpikir

Pola berpikir pada tahapan pemahaman dalam pemecahan masalah misalnya konsep dalam bentuk suatu sifat atau objek matematika yang sudah dikenal yang terjadi pada pemikiran siswa, maka yang terlintas dalam pikirannya apakah langsung mengingat contoh-contoh terlebih dahulu yang pernah dipelajari atau mengingat definisinya atau konsep dan prinsipnya. Tahapan yang demikian inilah yang akan dipakai acuan pada proses ketika siswa melakukan proses berpikir dalam menghadapi pemecahan masalah. Konsep matematika pada limit fungsi terdiri dari definisi atau rumus atau pengertian tentunya berbeda dengan penyajian di tingkat universitas yang dapat berbentuk definisi, teorema, maupun teorema akibat.

Transisi dari matematika sekolah dasar ke matematika sekolah menengah seringkali merupakan proses yang menyulitkan bagi siswa dari sisi ekspresinya atau interpretasinya (Novotna *et al*, 2006). Namun pada saat mempelajari ide baru yang ada pada matematika di sekolah menengah, maka ide lama yang sudah pernah dimiliki siswa hilang begitu

saja seakan konsep sebelumnya tidak ada kaitannya dengan pemahaman konsep sebelumnya. Hal ini dapat menghambat proses pengenalan struktur atau konsep yang baru dalam pemahaman maupun pemecahan masalah yang dihadapi. Proses transisi ke pemikiran matematika pada tingkat sekolah menengah diperlukan tahapan yang dapat membantu pemahamannya. Namun sebenarnya, secara simultan gambar konsep dalam pikiran seseorang yang terbentuk sebelumnya dan ide-ide baru yang dipahami berdasarkan definisi melalui proses deduksi logis (Novotna dkk, 2006).

Istilah samar pada "struktur familiar dan tidak familiar" pada siswa dapat ditentukan sampai batas tertentu dengan mengatakan bahwa mereka harus mengenal sebagai entitas konseptual artinya siswa memiliki prosedur yang dapat mengambil objek-objek ini sebagai input (Harel & Tall, 1989). Pada Pola abstraksi sifat-sifat spesifik dari satu atau lebih objek matematika untuk membentuk dasar definisi objek matematika abstrak baru, selanjutnya pada proses konstruksi konsep abstrak dapat dilakukan dengan proses deduksi logis dari definisinya (Harel & Tall, 1989).

Tahapan-tahapan ini menggambarkan tahapan seperti yang dikaji Novotna (2006).

Pola berpikir mengenal struktur konsep pada pemecahan masalah yang telah dilakukan pada kajian sebelumnya di materi grup yang

dilakukan siswa dengan sangat variatif tergantung kemampuan kognitif siswa dengan urutan jalut dimulai dari Pola-1→Pola-2→ Pola-3→Pola-4 hingga kembali ke Pola-1 kembali. Pada setiap Polanya saling berurutan, yaitu siswa memulai dengan konstruksi awal yang dimiliki kemudian dilanjutkan proses analogi, abstraksi dan akhirnya siswa bisa membuat konstruksi secara formal (Junarti et al, 2022). Untuk konstruksi formal pada satu bagian materi tertentu akan dijadikan dasar konstruksi awal pada materi selanjutnya begitu seterusnya sampai proses berjalan kembali dengan analogi, abstraksi hingga konstruksi formal lagi (Junarti et al, 2022).

Pola mengenal struktur konsep grup hasil kajian sebelumnya ini diimplementasikan kepada siswa pada tingkat yang lebih rendah yakni sekolah menengah atas dan pada materi yang berbeda yakni materi limit fungsi. Implementasi ini apakah mempunyai pola urutan Pola yang sama atau tidak. Apakah urutan Pola ini tetap masih merujuk pada struktur kognitif yaitu skema dan model mental, serta memberikan makna untuk memungkinkan individu melampaui informasi yang diberikan? (Bruner in Wiradinata, 2018). Oleh karena itu tujuan dari kajian ini yaitu untuk mendeskripsikan profil urutan Pola pemecahan masalah limit fungsi dengan menggunakan gabungan kerangka kerja Novotna dkk (2006) dan Junarti dkk (2022). Diharapkan setelah mendapatkan pola berpikir pemecahan masalah pada limit fungsi akan mendapatkan rekomendasi

pendekatan yang tepat untuk membantu pemecahan masalah siswa dalam konsep limit fungsi

Berbagai cara yang dilakukan oleh siswa dalam mengenali ide-ide baru berbeda-beda. Misalnya ada siswa yang menggunakan cara melalui contoh-contoh yang sudah dikenal sebagai bahan rujukan untuk mengenali struktur yang baru dikenalnya. Namun ada acara lain, misalnya seperti Simpson dan Stehlíková (2006) dengan menggunakan acuan berpikir secara abstrak dalam mengenal struktur matematika yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melihat elemen-elemen dalam himpunan sebagai objek di mana operasi bertindak (yang mungkin melibatkan pergeseran proses-objek).
2. Menghadirkan keterkaitan antar elemen dalam himpunan yang merupakan konsekuensi dari operasi binernya.
3. Melihat tanda-tanda yang digunakan mahasiswa dalam mendefinisikan struktur abstrak sebagai abstraksi objek dan operasi biner, dan melihat nama-nama hubungan di antara tanda-tanda sebagai nama untuk hubungan antara objek dan operasinya.
4. Melihat himpunan dan operasi lain sebagai contoh struktur umum dan sebagai bentuk asli struktur umum.
5. Menggunakan sistem formal simbol dan properti definisi untuk mendapatkan konsekuensi dan melihat bahwa sifat yang melekat pada

teorema adalah sifat dari semua contoh.

Konsep matematika yang dikenal dengan melalui proses abstraksi tersebut di atas, membutuhkan peran penting logika dalam mempelajari aljabar sekolah menengah agar memudahkan siswa dalam mempelajari matematika selanjutnya di universitas menjadi lebih mudah (Durand-Guerrier dkk, 2015). Sedangkan menurut Bassan-Cincinatus dan Feldman (2018) mempertimbangkan melalui sifat-sifat aritmatik individu di dalam pemahamannya untuk kebutuhan penalaran aljabar. Pada penalaran aljabar menurut Novotná dkk (2006) setidaknya dilakukan melalui tiga Pola. Tiga Pola yang dimaksud menurut Novotná dkk (dalam Oktac, 2016, hal. 311) mengidentifikasi tahapan sebagai berikut:

1. Pola pertama adalah mengekstraksi struktur yang dikenal untuk membentuk dasar definisi, dari mana konsep-konsep abstrak dibangun dalam konteks umum.
2. Pola kedua mengekstraksi sifat dari struktur yang diketahui yang mengarah ke generalisasi dan kemudian ke definisi.
3. Pola ketiga adalah konstruksi konsep melalui deduksi logis dari definisi mereka.

Oktac (2016) dalam kajian refleksinya, menjelaskan tiga Pola di atas menjadi bagian penting dalam pemahaman matematika, bahwa Pola pertama diekstraksi dari struktur yang dikenal untuk membentuk dasar definisi dari mana konsep abstrak dibangun dalam konteks umum. Pola

kedua, mengekstraksi properti dari struktur yang dikenal menyebabkan generalisasi dan kemudian ke definisi. Pola ketiga sesuai dengan konstruksi konsep melalui deduksi logis dari definisinya (Harel & Tall dikutip dalam Novotná *et al*, 2006, hal. 255).

Tahapan Pola dalam pemikiran siswa yang demikian ini sebagai bentuk identifikasi keberadaan tahapan pemahaman konsep dengan mengadaptasi tiga Pola dari Novotná dkk (dalam Oktac, 2016, hal. 311). Selanjutnya dilakukan kajian Pola dari beberapa kajian terdahulu yakni pada Tabel 2 sebagai berikut.

**Tabel 2.1 Kajian Teori tentang Draf Kerangka Kerja Pola
Pemahaman Konsep**

Kajian	Jenis Pola Proses <i>Structure</i>			
	<i>Sense</i> untuk Grup			
	$V_A \rightarrow D \rightarrow V_B$	$V_A \rightarrow V_B \rightarrow D$	$D \rightarrow V_A, V_B$	$D \rightarrow V_A \rightarrow V_B$
Dubinsky <i>et al</i> (1994)	√			
Harel dan Tall (1989)			1	
Stehlíková <i>et al</i> (2004)				1
Simpson dan Stehlíková (2006)			1	1

Novotna <i>et al</i> (2006)	√	·	·
Oktac (2016)	√	·	·
Junarti dkk (2022)			·

Dua tahapan dari Simpson dan Stehlíková (2006) pada Tabel 2 di atas yaitu: (1) melalui definisi konsep diberikan terlebih dahulu dengan maksud bahwa siswa akan melihat contoh sebagai contoh yang berbeda dari definisi umum atau (2) melalui pendekatan contoh yang bertujuan untuk sampai pada generalisasi. Sedangkan Pola tambahan $D \rightarrow V_A \rightarrow V_B$ pada Tabel 2.1 sebagai salah satu Pola yang diperoleh dari analisis kebutuhan untuk sampai deduksi logis. Empat Pola yang digunakan sebagai kerangka kerja pada penelusuran berpikir siswa dalam proses pemecahan masalah pada limit fungsi.

Deskripsi Pola berpikir pada proses pemecahan masalah dijabarkan berdasarkan adaptasi dari deskripsi Oktac (2016) terhadap 3 Pola Novotna *et al* (2006) dan 1 Pola hasil pengembangan Junarti dkk (2022) yang disajikan pada Tabel 2.2 berikut ini.

Tabel 2.2 Deskripsi Empat Tahapan/Pola Berpikir pada Proses Pemahaman dan Pemecahan Masalah

Jenis	Pola (<i>Path</i>)	Deskripsi Indikator
-------	----------------------	---------------------

Pola		
Pola-1	$V_A \xrightarrow{\text{Abstraksi}} D \xrightarrow{\text{Konstruksi}} V_B$	Siswa dapat memahami dan mengerjakan soal limit, jika dapat mengabstraksi definisi dasar/konsep limit fungsi melalui contoh yang sudah dikenal, selanjutnya baru dapat mengkonstruksi struktur sifat/obyek yang baru dikenal
Pola-2	$V_A \xrightarrow{\text{Analogi}} \cancel{V_A} \xrightarrow{\text{Abstraksi}} \cancel{V_B}$ D	Siswa dapat memahami dan mengerjakan soal limit, jika dapat mengkonstruksi struktur sifat atau objek matematika baru atau yang belum dikenal melalui menganalogi contoh yang sudah dikenal, selanjutnya baru dapat mengabstraksi definisi/konsep limit fungsi
Pola-3	$D \xrightarrow{\text{Konstruksi}} V_A, V_B$	Siswa dapat memahami dan mengerjakan soal limit, jika dapat mengkonstruksi struktur sifat atau objek matematika yang dikenal dan yang belum dikenal melalui deduksi logis dari langsung definisi/konsep limit fungsi yang sudah dipahami siswa
Pola-4	$D \xrightarrow{\text{Konstruksi}} V_A \xrightarrow{\text{Analogi}} V_B$	Siswa dapat memahami dan mengerjakan soal limit, jika dapat mengkonstruksi struktur sifat atau objek matematika yang dikenal melalui

deduksi logis dari definisi/konsep limit
fungsi, selanjutnya baru dapat menganalogi
contoh yang sudah dikenal untuk
memahami/memecahkan struktur sifat atau
objek matematika yang baru atau yang belum
dikenal siswa

Keterangan:

V : singkatan dari sifat atau objek

indeks A : untuk struktur yang dikenal

indeks B : untuk struktur yang tidak dikenal

D : untuk definisi

→ : menunjukkan arah tahapan berikutnya

B. Proses Pemecahan Masalah Matematika

Pemecahan masalah menurut matematikawan, merupakan aktivitas yang lebih kreatif dan mencakup rumusan kemungkinan dugaan, urutan aktivitas pengujian, modifikasi dan pemurnian sampai memungkinkan menghasilkan bukti formal dari teorema yang ditentukan dengan baik. Sedangkan menurut Polya (1945) mengemukakan empat fase sebagai kerangka kerja untuk pemecahan masalah:

- mengerti masalahnya,
- menyusun rencana,

- melaksanakan rencana tersebut,
- lihat kembali pekerjaannya.

Kerangka kerja Polya ini telah membentuk banyak upaya selanjutnya dalam merumuskan strategi pemecahan masalah, walaupun Mason et al (1982) dan Schoenfeld (1985) (Dalam Tall, 2002: h. 19) telah melihat kebutuhan untuk membuat heuristik aktual jauh lebih eksplisit dan lebih sesuai untuk siswa. Termasuk gagasan dalam merancang sebuah rencana penyelesaian biasanya sangat menakutkan bagi siswa pada tingkat awal seperti pada sekolah menengah atas. Sedangkan kerangka kerja seperti yang disarankan oleh Mason, dengan menggunakan tahapan tiga fase sebagai berikut.

- masuk,
- menyerang,
- review

Berdasarkan tahapan di atas, mengandung makna bahwa yang dimaksud tahapan masuk mencakup dua tahapan pertama pada Polya sementara yang dimaksud serangan dan peninjauan sesuai dengan tahapan ketiga dan keempat pada Polya. Pada tahap entri pemecahan masalah potensial berkenalan dengan konteks pemecahan masalah mendapatkan rasa masalah dengan bermain dengan ide, mungkin melalui spesialisasi sederhana, beralih ke aposisi yang mencoba untuk menentukan dengan jelas apa yang diketahui dan apa yang diinginkan, dan

mempertimbangkan dengan hati-hati apa yang bisa diperkenalkan (notasi, prosedur solusi, dll) yang mungkin mengambil pemecahan masalah dari apa yang diketahui dengan apa yang diinginkan. Kemudian terjadi perubahan kualitatif dengan adanya serangan yang dilakukan terhadap masalah dengan menggunakan gagasan yang telah diperkenalkan. Ini mungkin berhasil, tapi bisa lebih sering mengarah pada kebuntuan, sebuah jalan buntu yang tampak dari mana individu harus meninjau kembali apa yang telah dilakukan dan kembali ke fase masuk untuk mempertimbangkan serangan baru. Setelah beberapa jenis solusi tercapai, perubahan mood lagi-lagi menjadi salah satu review yang bijaksana - memeriksa hasil untuk memastikan tidak ada kesalahan yang telah dilakukan, meninjau kembali apa yang telah dilakukan untuk mempelajari strategi yang mungkin berguna pada kesempatan lain dan kemudian dipersiapkan untuk memperpanjang masalah ke tingkat kecanggihan baru, memulai kembali siklus masuk pada tingkat yang lebih canggih.

Penulis telah memiliki beberapa tahun pengalaman dalam mengajar pemecahan masalah dalam kerangka kerja ini. Sudah terbukti memungkinkan para sarjana untuk mengembangkan cara-cara awal untuk memecahkan masalah walaupun prosesnya memerlukan periode awal yang lebih lama agar siswa dapat mencapai titik pandang daripada yang terlihat saat memberikan informasi dalam sebuah ceramah. Namun, pembayarannya adalah cara merangsang pemikiran reflektif dan

mengembangkan monitor internal di dalam pikiran siswa untuk merasakan kemajuan dan arah proses solusinya.

Namun, Mason et al (1982)(Dalam Tall, 2002: h. 20) menggambarkan proses verifikasi dalam Thinking Matematis pada tiga tingkatan:

- meyakinkan diri sendiri,
- meyakinkan seorang teman,
- meyakinkan musuh

Meyakinkan diri sendiri melibatkan gagasan mengapa beberapa pernyataan mungkin benar, namun meyakinkan seorang teman mengharuskan agar argumen diorganisasikan dengan cara yang lebih koheren. Meyakinkan musuh berarti bahwa argumen tersebut sekarang harus dianalisis dan disempurnakan sehingga akan tahan uji kritik. Inilah yang paling mendekati bahwa Berpikir secara matematis sampai pada gagasan pembuktian. Apa yang sama sekali tidak ada adalah pengertian tentang definisi formal dan logika deduksi formal dari definisi tersebut.

Mungkin dihipotesiskan bahwa pemikiran matematis di setiap tingkat dapat mencakup entri fase, serangan dan peninjauan, termasuk tingkat pembenaran matematis, namun pemikiran matematika dasar tersebut tidak memiliki proses abstraksi formal dan tidak mencakup "fase awal" terakhir dalam kedok paling formal

Perpindahan dari pemikiran matematika dasar sampai mahir melibatkan transisi yang signifikan: mulai dari mendeskripsikan hingga mendefinisikan, dari meyakinkan, terbukti dengan cara yang logis berdasarkan definisi tersebut. Transisi ini membutuhkan rekonstruksi kognitif yang terlihat saat awal perjuangan mahasiswa dengan abstraksi formal saat mereka menyelesaikan tahun pertama universitas. Ini adalah transisi dari koherensi matematika dasar dengan konsekuensi matematika tingkat lanjut, berdasarkan entitas abstrak yang harus dibangun individu melalui deduksi dari definisi formal.

C. Pola Berpikir melalui Analogi, Abstraksi dan Konstruksi

Tahapan berpikir yang melalui analogi, abstraksi dan konstruksi merupakan bentuk keterampilan termasuk di dalamnya ketika melakukan variasi dari keduanya atau ketiga tahapan tersebut. Keterampilan ini merupakan bagian penting yang dibutuhkan dalam pemecahan masalah matematika. Kita sadari bahwa Siswa dalam memahami, mempelajari, memecahkan masalah, dan dalam memperlakukan limit fungsi menggunakan cara yang berbeda-beda. Hal ini menunjukkan individu tertentu dapat menimbulkan perbedaan sikap terhadap konsep matematika tergantung pada pengalaman sebelumnya (Tall, 2002). Misalnya seperti dalam menentukan limit fungsi menuntut keterampilan abstraksi tertentu dari siswa (Tall, 2002).

Proses pemecahan masalah menurut Novotna dkk (2006) dan Oktac (2016) setidaknya melalui tiga Pola. Menurut Junarti dkk (2022) setidaknya ada empat Pola tahapan untuk memahami struktur konsep matematika Hal ini sejalan dengan tahapan pemahaman dan tahapan pemecahan masalah (Memnun et al, 2017).

Konstruksi dan abstraksi ketika dilakukan dalam sebuah pemecahan masalah membutuhkan pemeriksaan proses abstraksi individu (Memnun et al, 2017). abstraksi terjadi di sebuah proses pemecahan masalah dimana siswa melakukan tindakan pembentukan menggunakan metode baru (Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). Untuk membantu pemahaman siswa di sekolah menengah atas seringkali masih menggunakan cara Raman (2004) dalam memperkenalkan pengertian limit yang didasarkan pada contoh dan deskripsi informal. Sedangkan Landasan formal sebagai teknik semestinya dilakukan namun baru dapat dilakukan ketika di tingkat universitas (Fernandez-Plaza & Simpson, 2016).

Hal ini menunjukkan bahwa beberapa proses kognitif yang diperlukan dalam pemahaman siswa tentang gagasan limit mencerminkan bagaimana mereka diajarkan melalui citra dinamis mungkin merupakan konstruksi budaya yang berguna bagi pemahaman siswa, bukan konstruksi kognitif yang diperlukan (Fernandez-Plaza & Simpson, 2016). Pembelajaran matematika menurut pandangan konstruktivis adalah

memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengkonstruksi konsep-konsep/prinsip-prinsip matematika dengan kemampuan sendiri melalui proses internalisasi (Rosnawati, 2009).

Konstruksi kognitif pada pemahaman siswa memerlukan proses abstraksi. Proses abstraksi merupakan bentuk mengisolasi konsep dari karakteristik spesifiknya dan mengarahkan proses dari serangkaian konteks menuju konsep (Dreyfus, 2007; Mitchelmore, 2002; Sierpinska 1994; Tall, 1988; Yilmaz, 2011). Salah satu model yang digunakan pada proses abstraksi oleh Memnun et al (2017) yaitu abstraksi RBC+C (recognizing, building-with, construction, and consolidation) dengan melalui tahapan mengenali, membangun dengan, konstruksi, dan konsolidasi. Dalam model ini, dilakukan langkah mengatur ulang struktur lama untuk mencapai struktur baru, membangun koneksi dan hubungan di antara keduanya, dan mengintegrasikannya ke dalam satu proses berpikir Memnun et al (2017). Model ini juga memungkinkan menganalisis konstruksi pengetahuan siswa melalui tindakan kognitif untuk mengenali, membangun dengan konstruksi dan konsolidasi. Sedangkan pada proses abstraksi dibentuk melalui tiga langkah yakni langkah pertama adalah kebutuhan akan struktur baru, langkah kedua adalah formasi entitas abstrak baru yang memproses tindakan mengenali dan membangun karena struktur yang ada saling berbaur, langkah ketiga adalah mengkonsolidasikan abstraksi di sedemikian rupa untuk memfasilitasi

pengakuan seseorang (Memnun et al, 2017). Selain itu, abstraksi terjadi di sebuah proses pemecahan masalah dimana siswa melakukan tindakan pembentukan menggunakan metode baru (Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). Kajian lain menyarankan adanya pendekatan grafis untuk memfasilitasi pengembangan struktur mental pada tingkat proses dan objek, sementara a fokus pada struktur simbolik harus membantu konsepsi objek (Maharaj, 2010).

Proses pemecahan masalah yang terjadi pada siswa ada kaitannya erat dengan proses pada teory APOS. Proses merupakan struktur mental yang melakukan operasi melalui tindakan, tetapi seluruhnya terjadi dalam pikiran individu (Maharaj, 2010) . Selanjutnya dalam pikiran individu mampu melakukan transformasi tanpa harus menjalankan setiap langkah secara eksplisit (Maharaj, 2010). Studi-studi ini banyak mengarah kepada pemahaman dan pemecahan masalah limit fungsi pada suatu titik selalu melibatkan berpikir tentang urutan atau menggunakan citra dinamis (Fernandez-Plaza & Simpson, 2016). Dalam kajian ini mengarah kepada suatu proses yang terjadi dalam pemikiran siswa sebagai bagian dari bentuk langkah yang akan dilakukan siswa ketika melakukan pemahaman yang dibuthkan dalam pemecahan masalah limit fungsi. Menurut Dubinsky et al. (2005), proses adalah struktur mental yang melakukan operasi yang sama dengan tindakan yang di-interiorisasi, tetapi sepenuhnya dalam pikiran individu, sehingga memungkinkan dia untuk membayangkan

melakukan transformasi tanpa harus melaksanakan setiap langkah secara eksplisit.

BAB III

KONSEP LIMIT FUNGSI

Karakteristik konsep limit pada kalkulus dan konsep grup pada aljabar abstrak mempunyai tingkat analisis yang tinggi. Kedua konsep ini diawali dengan definisi yang sarat akan makna dan membutuhkan tingkat abstraksinya tinggi. Limit merupakan konsep yang sulit dipahami secara akurat (Wu, 2020). Di satu sisi konsep limit merupakan konsep matematika dasar yang harus dipahami oleh setiap siswa untuk membantu pemahaman matematika selanjutnya di tingkat sekolah menengah hingga maupun sampai pada tingkat Universitas. Konsep limit merupakan pengertian yang penting dan mendasar dalam kalkulus (Denbel, 2014)(Fern & Simpson, 2016)(Juter, 2007) (Liang, 2016) (Memnun dkk, 2017) (Wabula & Cahyono, 2017)(Wu, 2020) maupun dalam Analisis Riil (Denbel, 2014).

Konsep limit meliputi konsep-konsep yang sulit dipahami (Wu, 2020)(Maharaj, 2010)(Fern & Simpson, 2016). Misalnya kegagalan dalam menghubungkan dasar-dasar gagasan pada kerangka kerja konseptual pada kesamaan simbol dan definisi (Fernandez-Plaza & Simpson, 2016), kesulitan dalam menggunakan dan memahami konsep, kesulitan mengingat nama-nama secara teknis dan ketidakmampuan menyatakan